- Pour comparer les topologies induites par deux bases ...

<u>Le lemme de comparaison de bases</u> : Soit X un ensemble, et soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de topologie sur X. Alors :

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}'} \iff \forall B \in \mathcal{B}, \forall x \in B, \exists B' \in \mathcal{B}' \text{ tq } x \in B' \subseteq B.$$

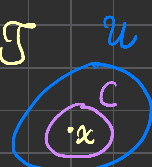
- Pour caractériser des ensembles de parties qui sont des bases d'une topologie donnée.

<u>Le lemme de test de base</u> : Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, et soit $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$. Alors :

$\mathcal{C}$ est une base de topologie telle que $\mathcal{T}_{\mathcal{C}} = \mathcal{T}$

$$\Updownarrow$$

$$\forall U \in \mathcal{T}, \forall x \in U, \exists C \in \mathcal{C} \text{ tq } x \in C \subseteq U.$$



- Enfin, pour créer une base à partir d'une sous-base ...

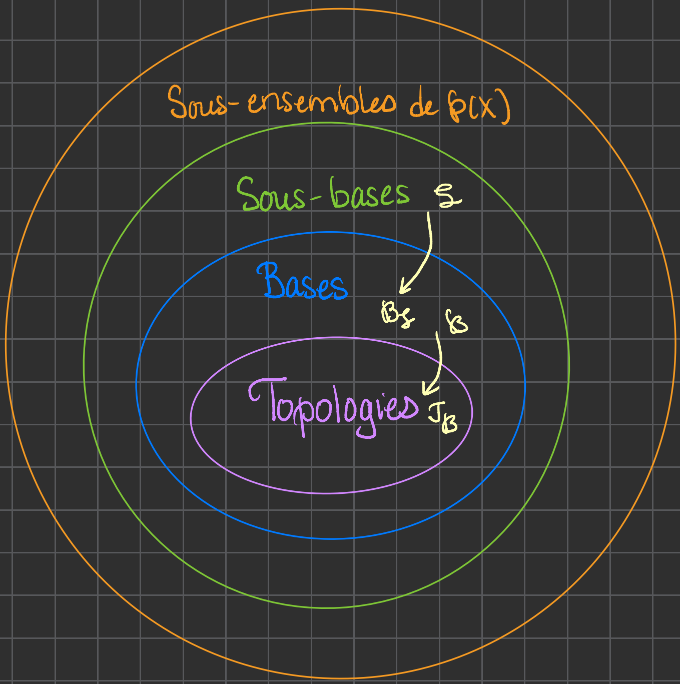
<u>Lemme</u>: Soit $\mathcal{S}$ une sous-base de topologie sur un ensemble X. Poser

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} S_i \;\middle|\; S_i \in \mathcal{S} \ \forall i,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Alors $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ est une base de topologie.

<u>Notation</u>: $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}}$.

Résumé pour un ensemble X donné



ii) Applications continues

Comment comparer deux espaces topologiques?

<u>Déf^n</u>: Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ des espaces topologiques.

Une application $f: X \to X'$ est continue par rapport à $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ si $\forall\, \mathcal{U}' \in \mathcal{T}'$, $f^{-1}(\mathcal{U}') \in \mathcal{T}$.

On écrira: "$f: (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue".

Pour tout $x \in X$, f est continue en x par rapport à $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ si $\forall\, \mathcal{U}' \in \mathcal{T}'$ tq $f(x) \in \mathcal{U}'$,

$\exists\, \mathcal{U} \in \mathcal{T}$ tq $x \in \mathcal{U} \subseteq f^{-1}(\mathcal{U}')$.

<u>Lemme</u>: Sous les conditions de la définition ci-dessus,

f est continue p.r. à $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ $\Leftrightarrow$ f est continue en x, $\forall x \in X$, p.r. à $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$

Une illustration de l'utilité des sous-bases ...

<u>Lemme</u>: Sous les conditions de la définition ci-dessus,

si $\mathcal{S}'$ est une sous-base de $\mathcal{T}'$, alors

f est continue p.r. à $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(S') \in \mathcal{T}$ $\forall\, S' \in \mathcal{S}'$.

Exemples : (0) $\forall f : X \to Y$, $\forall \mathcal{T}$ topologie sur X,

$f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_{gr})$ est continue.

(∞) $\forall f : X \to Y$, $\forall \mathcal{T}$ topologie sur Y,

$f : (X, \mathcal{T}_{disc}) \to (Y, \mathcal{T})$ est continue

(d) Soient (X, d), (X', d') espaces métriques

Soit $f : X \to X'$.

$f : (X, d) \to (X', d')$ continue $\iff$ $f : (X, \mathcal{T}_d) \to (X', \mathcal{T}_{d'})$ continue.

(1) Soient $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ des topologies sur X.

$Id_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ continue $\iff$ $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$.

(2) Soient $(X, \mathcal{T})$, $(X', \mathcal{T}')$ espaces topologiques.

Soit $x_0' \in X'$. Alors :

$cst_{x_0'} : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est toujours continue.