② L'axiomatique de la topologie

But: Elaborer un point de vue axiomatique de la notion de continuité, inspiré par la continuité d'applications entre espaces métriques

ⓐ Notions fondamentales

i) Topologies, bases, et sous-bases

Ouverts comme notion clé...

Notation: Pour tout ensemble X, on écrit $\mathcal{P}(X)$ pour l'ensemble de toutes les parties de X.

Déf^n: Soit X un ensemble. Une topologie sur X est un sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(X)$ qui vérifie les trois axiomes suivants.

(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(T2) $\forall$ ensemble I, $\forall \{U_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{T}$, $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

(T3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \{U_1, \dots, U_n\} \subseteq \mathcal{T}$, $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$.

Le couple $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique.

Les éléments de $\mathcal{T}$ sont des ouverts de $(X, \mathcal{T})$.

Q: Idées? <u>Exemples</u>: Tout ensemble X admet les topologies suivantes

(0) La topologie grossière (ou triviale):

$$\mathcal{T}_{gr} = \{\phi, X\}.$$

(∞) La topologie discrète:

$$\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(X).$$

(1) La topologie du complément fini:

$$\mathcal{T}_{comp} = \{\mathcal{U} \in \mathcal{P}(X) \mid \#(X \setminus \mathcal{U}) < \infty\} \cup \{\phi\}.$$

<u>Terminologie</u>: Soient $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ des topologies sur X.

Si $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, on dit que $\mathcal{T}$ est plus fine que $\mathcal{T}'$, et que $\mathcal{T}'$ est plus petite de $\mathcal{T}$.

<u>Exemples</u>: (dans le cas fini)

(0) $X = \phi$: seule topologie possible $\mathcal{T} = \{\phi\} = \mathcal{T}_{disc} = \mathcal{T}_{gr}$

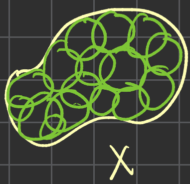
(1) $X = \{x\}$: ——— " ——— $\mathcal{T} = \{\phi, \{x\}\} = \mathcal{T}_{disc} = \mathcal{T}_{gr}$

(2) $X = \{x, y\}$: $\mathcal{T}_{gr} = \{\phi, \{x,y\}\}$

$\mathcal{T}_x = \{\phi, \{x\}, \{x,y\}\}$ $\leftarrow$ incomparables $\rightarrow$ $\mathcal{T}_y = \{\phi, \{y\}, \{x,y\}\}$

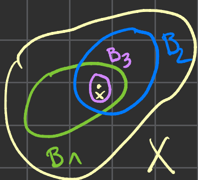
$\mathcal{T}_{disc} = \{\phi, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}\}$

Pour pouvoir spécifier une topologie sans donner la liste de tous ces éléments ...



<u>Déf^n</u>: Soit X un ensemble. Une base de topologie sur X est un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}(X)$ qui vérifie les axiomes suivants.

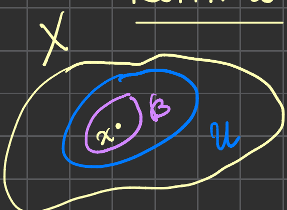
(B1) $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$ $(\iff \forall x\in X, \exists B\in\mathcal{B}$ tq $x\in B)$



(B2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall x\in B_1\cap B_2, \exists B_3\in\mathcal{B}$ tq $x\in B_3$.

<u>Rmq</u>: Toute topologie est une base de topologie.

<u>Lemme</u>: Soit $\mathcal{B}$ une base de topologie sur X.



Poser $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{U\in\mathcal{P}(X) \mid \forall x\in U, \exists B\in\mathcal{B}$ tq $x\in B\subseteq U\}$.

Alors $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ est une topologie sur X.

<u>Terminologie</u>: $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ est la topologie engendrée par $\mathcal{B}$.

<u>Rmqs</u>:
- $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{\bigcup_{B\in\mathcal{A}} B \mid \mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}\}$.
- $\mathcal{T}_{\mathcal{T}} = \mathcal{T}$.
- $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{B}' \Rightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{B}}\subseteq\mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$
- $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$

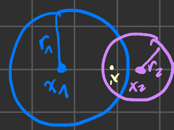
Exemples: Soit X un ensemble

(i) $\mathcal{B} = \{X\} \Rightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \mathcal{T}_{gr}$

(ii) $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\} \Rightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \mathcal{T}_{disc}$

Lemme: Si (X, d) est un espace métrique, alors $\mathcal{B}_d = \{ B_d(x, r) \mid x \in X,\ r > 0 \}$ est une base de topologie sur X.

$r = \min\{r_1 - d(x_1, x),\ r_2 - d(x_2, x)\}$



Notation: $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{\mathcal{B}_d}$ = la topologie sur X induite par la métrique d.

$$\mathcal{U} \in \mathcal{T}_d \Leftrightarrow \exists \{(x_i, r_i) \in X \times \mathbb{R}_{>0} \mid i \in I\} \text{ tq } \mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} B_d(x_i, r_i).$$

A venir

- comparaison de bases et des topologies qu'elles engendrent
- illustrations de l'utilité des bases

Un premier aperçu de la continuité

Soient $(X, \mathcal{T})$, $(X', \mathcal{T}')$ des espaces topologiques. Une application $f : X \to X'$ est continue par rapport à $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ si

$$\mathcal{U}' \in \mathcal{T}' \implies f^{-1}(\mathcal{U}') \in \mathcal{T}.$$

On verra que cette définition généralise bien celle d'une application continue entre espaces métriques, quand nous aurons vu comment caractériser la continuité en termes de bases et sous-bases.