

Introduction au cours Topologie I

Bienvenue au cours de topologie !

Je vous donne dans cette introduction quelques précisions concernant l'organisation et le contenu de ce cours, dont la matière m'est très chère, la topologie étant mon domaine de recherche.

Organisation

- **Le cours**

Bien que le cours soit donné dans un format *ex cathedra* classique au tableau noir, j'essaierai de le rendre interactif. Pendant le cours je vous demanderai souvent de réfléchir un moment à des questions concernant la matière et solliciterai ensuite des réponses de votre part. Peu importe si elles ne sont pas tout à fait justes ! L'effort de comprendre ce qui ne joue pas dans une réponse incorrecte nous apprend beaucoup. Je vous encourage donc de participer activement au cours, en répondant à mes questions – et en me posant les vôtres aussi.

- **Les séances d'exercices**

Lors des séances d'exercices, vous travaillerez par groupe de quatre à cinq étudiants, avec l'aide de deux assistants par salle. Ces groupes seront formés au début du semestre (voir l'outil de formation de groupes sur Moodle) et resteront ensemble jusqu'à la fin du semestre.

Il y aura une série d'exercices chaque semaine. Chaque groupe aura **la possibilité de rendre un exercice par semaine pour correction**. Les notes des séries ne compteront pas pour votre note finale, mais vous serviront d'indication de votre compréhension de la matière. Je vous encourage vivement de rendre les exercices, afin de recevoir du feedback sur votre niveau de compréhension, ainsi que sur la qualité de votre rédaction mathématique.

- **Lean**

Des outils informatiques jouent un rôle de plus en plus important en mathématiques, y compris en mathématiques fondamentales, où ils peuvent fournir une aide interactive à la rédaction de preuves rigoureuses. Puisque les mathématicien·nes de l'avenir (comme vous !) travailleront certainement régulièrement avec ce genre d'outils, j'ai décidé d'intégrer une familiarisation avec le plus connu d'entre eux, [Lean](#), au cours de topologie, qui se prête particulièrement bien à ce type de « formalisation » des maths.

L'apprentissage de Lean se fera de façon ludique, à travers un jeu créé par l'assistant principal du cours, Bjørnar Hem. Il profitera de la première séance d'exercices pour vous présenter son jeu, dans lequel vous pourrez avancer à votre rythme, aidé par les assistants lors des séances d'exercices.

Vous ne serez **pas** examiné-es sur votre compréhension de Lean.

- **EdForum**

Comme pour la plupart des cours à l'EPFL, ce cours a un forum de discussion, EdForum, où vous pourrez poser vos questions sur le cours, les exercices, le jeu Lean, etc., afin que les assistants ou d'autres étudiant-es y répondent.

- **Moodle**

Sur la page Moodle du cours vous trouverez les documents suivants.

- Mes notes de cours
- Les séries d'exercices et leurs corrigés
- Le plan détaillé du cours
- Un lien vers l'Ed Forum du cours
- Un lien vers le canal Mediaspace du cours où seront stockés les enregistrements du cours
- Un lien vers le jeu Lean « Topology Game »

Contenu

Pour terminer, quelques remarques concernant le contenu du cours...

- **Espaces métriques**

Vous connaissez déjà bien la métrique euclidienne sur \mathbb{R}^n , qui joue un rôle clé en analyse, notamment dans la formulation de la notion de continuité d'applications. Vous avez aussi vu la notion de distance entre deux vecteurs que l'on peut associer à un produit scalaire sur un espace vectoriel. Nous étudierons dans cette première partie du cours une généralisation de ces notions au concept d'un *espace métrique* dont nous verrons une grande diversité d'exemples. Nous explorerons également différentes façons de comparer deux espaces métriques, par le biais d'applications entre eux qui vérifient différentes conditions – dont une généralisation de la continuité.

- **Une approche axiomatique à la topologie**

La continuité d'une application entre deux espaces métriques pouvant être formulée en termes de *boules ouvertes*, il paraît naturel d'examiner de plus près cette notion fondamentale. Dans cette partie du cours, qui en fait vraiment le

cœur, nous étudierons les *espaces topologiques*, qui sont des ensembles munis d'une notion de *sous-ensemble ouvert*, dont la collection vérifie trois axiomes élémentaires. A partir de cette définition simple et élégante, nous élaborerons toute la théorie de ces objets, notamment celle des applications entre espaces topologiques qui respectent leur structure supplémentaire de sous-ensembles ouverts – autrement dit, des *applications continues*.

- **Notions de séparabilité**

Cette partie du cours concernera une hiérarchie naturelle et importante de tous les espaces topologiques, en fonction de la possibilité d'utiliser des ouverts pour « séparer » les parties de l'espace. Cela peut paraître peu intuitif comme concept, mais il s'avère que mieux on arrive à « séparer » des parties d'un espace topologique, mieux on arrive à le comprendre, afin, par exemple, de définir une application continue dont l'espace topologique en question est le domaine.

- **La notion de « connexe »**

Dire qu'un espace topologique est *connexe* entend qu'il est d'une certaine manière indécomposable en plusieurs sous-parties non-triviales. Nous étudierons dans cette partie du cours différentes façons de rendre rigoureuse cette notion intuitive, notamment en termes de l'existence de *chemins* reliant des points de l'espace.

- **Espaces fonctionnels**

Il s'avère que l'ensemble des applications continues d'un espace topologique vers un autre admet aussi la structure d'un espace topologique – et cela de plusieurs façons différentes. Nous ferons une étude comparative de ces multiples façons de définir une structure d'espace topologique sur cet ensemble d'applications et verrons à quoi peut servir une telle structure.