Examen Blanc de Topologie I
SMA - EPFL

19.12.2025

Question 1 (20 pts)**.** Petits problèmes

1. (10 pts) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique métrisable. Soient $A \subseteq X$ et $x \in X$. Démontrer que $x \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.

2. (10 pts) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique compact et de Hausdorff. Soit $Y \subseteq X$ fermé par rapport à la topologie $\mathcal{T}$. Soient C et C' des composantes connexes de $(X, \mathcal{T})$ telles que $C \neq C'$.

   Montrer qu'il existe une application continue
   $$f : (Y, \mathcal{T}_Y) \to \big([0,1], (\mathcal{T}_{st})_{[0,1]}\big)$$
   telle que $f(y) = 0$ pour tout $y \in Y \cap C$ et $f(y) = 1$ pour tout $y \in Y \cap C'$.

Question 2 (60 pts)**.** Vrai ou faux, avec justification

1. (15 pts) Soit $\mathcal{T}$ la topologie de sous-espace sur le cercle
   $$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$
   induite par la topologie standard sur $\mathbb{R}^2$. Soit $T = S^1 \times S^1$, le *tore*, muni de la topologie produit $\mathcal{T} * \mathcal{T}$. Soit
   $$\big\{ f_j : (T, \mathcal{T} * \mathcal{T}) \to (Y_j, \mathcal{T}_j) \mid j \in \mathcal{J} \big\}$$
   un ensemble d'applications tel que si une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans T converge vers z, alors la suite $\big(f_j(z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ dans Y_j converge vers $f_j(z)$, pour tout $j \in \mathcal{J}$.

   Poser $f = (f_j)_{j\in\mathcal{J}} : T \to \prod_{j\in\mathcal{J}} Y_j$.

   Existe-t-il $A \subset T$, $a \in \bar{A}$ et $U \in *_{j\in\mathcal{J}} \mathcal{T}_j$ tels que $f(a) \in U$ et $U \cap f(A) = \emptyset$?

2. (15 pts) Soit $\mathcal{T}$ la topologie de sous-espace sur le cercle
   $$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$
   induite par la topologie standard sur $\mathbb{R}^2$. Est-ce que $(S^1, \mathcal{T})$ est homéomorphe à $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st})$?

3. (15 points) Soit $(G, \mu, e, \mathcal{T})$ un groupe topologique, i.e., $(G, \mathcal{T})$ est un espace topologique, et (G, μ, e) est un groupe, où la mutiplication

$$\mu : (G \times G, \mathcal{T} * \mathcal{T}) \to (G, \mathcal{T})$$

est continue, et $e \in G$ est l'élément neutre e. Si $(G, \mathcal{T})$ est connexe et localement connexe par arcs en e, est-ce que $(G, \mathcal{T})$ est connexe par arcs?

4. (15 points) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Supposons qu'il existe $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{P}(X)$ tel que

- $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$,
- $\overline{X}_n \cap \overline{X}_{n+1} \neq \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et
- $(X_n, \mathcal{T}_{X_n})$ est connexe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $f : (X, \mathcal{T}) \to (S^1, (\mathcal{T}_{\mathbb{R}^2})_{S^1})$ une application continue. S'il existe $x, x' \in X$ tel que $f(x) = (1, 0)$ et $f(x') = (-1, 0)$, est-ce qu'au moins l'un de $(0, 1)$ et $(0, -1)$ est forcément dans l'image de f?

Question 3 (20 points)**.** Etude théorique

Soient $\{(Y_j, \mathcal{T}_j) \mid j \in J\}$ une collection d'espaces topologiques, et soit X un ensemble. Soit $\{f_j : X \to Y_j \mid j \in J\}$ une collection d'applications.

Soit $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ la topologie la plus grossière telle que

$$f_j : (X, \mathcal{T}) \to (Y_j, \mathcal{T}_j)$$

soit continue pour tout $j \in J$, que l'on peut appeler la *topologie induite par la collection* $\{f_j \mid j \in J\}$.

1. (5 points) Donner une description explicite (ou construction) de $\mathcal{T}$ et justifier.
2. (7 points) Supposer que pour tout $x \neq x' \in X$, il existe $j_0 \in J$ tel que $f_{j_0}(x) \neq f_{j_0}(x')$. Montrer que si $(Y_j, \mathcal{T}_j)$ est de Hausdorff pour tout $j \in J$, alors $(X, \mathcal{T})$ est aussi de Hausdorff.
3. (8 points) Soit $(X', \mathcal{T}')$ un espace topologique, et soit $g : X' \to X$ une application. Montrer que $g : (X', \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ est continue si et seulement si $f_j \circ g : (X', \mathcal{T}') \to (Y_j, \mathcal{T}_j)$ est continue pour tout $j \in J$.