① Espaces métriques — Notn: $\# X$ = cardinalité de X

ⓐ Rappels d'Analyse avancée et d'Algèbre linéaire

• Métriques sur $\mathbb{R}^n$

Notation: $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

$$d_{euc} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : (v, w) \mapsto \left[\sum_{i=1}^{n} (v_i - w_i)^2\right]^{1/2}$$

– la distance euclidienne entre v et w

Propriétés importantes

- $d_{euc}(v, w) = 0 \iff v = w$ (positivité)
- $d_{euc}(v, w) = d_{euc}(w, v)$ $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$ (symétrie)
- $d_{euc}(u, w) \leq d_{euc}(u, v) + d_{euc}(v, w)$ $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^n$ ($\neq$ du Δ)

Rappel d'algèbre linéaire

$$\langle -, - \rangle_{euc} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : (v, w) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

– le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$

$$\| - \|_{euc} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0} : v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle_{euc}} = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

- Continuité d'applications $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Formulation en termes de d_{euc} ...

Déf^n : Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$.

f est continue en v si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq

$$d_{euc}(v, w) < \delta \Rightarrow d_{euc}(f(v), f(w)) < \varepsilon.$$

f est continue si elle est continue en v, $\forall v \in \mathbb{R}^n$.

Rmq : Généralisation à $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$

Pour formuler une caractérisation "géométrique" de la continuité, on utilisera ...

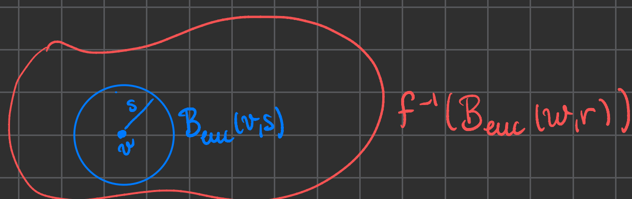
Déf^n : Soient $v \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. La boule ouverte euclidienne de rayon r et centré en v est :

$$B_{euc}(v, r) = \{ w \in \mathbb{R}^n \mid d_{euc}(v, w) < r \}$$

Caractérisation de la continuité : Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$

f est continue ssi $\forall w \in \mathbb{R}^m$, $\forall r > 0$, $\forall v \in f^{-1}(B_{euc}(w, r))$,

$$\exists\, s > 0 \text{ tq } B_{euc}(v, s) \subseteq f^{-1}(B_{euc}(w, r)).$$



<u>Preuve</u> : $\Rightarrow$: $v \in f^{-1}(B_{euc}(w,r)) \Leftrightarrow d_{euc}(w, f(v)) < r$

Poser $\varepsilon = r - d_{euc}(w, f(v))$.

Par continuité de f, $\exists\, \delta$ tq $d_{euc}(v,u) < \delta \Rightarrow$

$d_{euc}(f(v), f(u)) < \varepsilon$, autrement dit :

$$u \in B_{euc}(v, \delta) \Rightarrow d_{euc}(f(v), f(u)) < \varepsilon,$$

d'où : $d_{euc}(w, f(u)) \leq d_{euc}(w, f(v)) + d_{euc}(f(v), f(u)) < r$,

autrement dit : $f(u) \in B_{euc}(w,r)$,

ce qui est équivalent à : $u \in f^{-1}(B_{euc}(w,r))$.

D'où : $B_{euc}(v,\delta) \subseteq f^{-1}(B_{euc}(w,r))$ /

$\Leftarrow$: Soient $v \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$. Puisque $v \in f^{-1}(B_{euc}(f(v), \varepsilon))$,

par hypothèse $\exists\, \delta > 0$ tq $B_{euc}(v, \delta) \subseteq f^{-1}(B_{euc}(f(v), \varepsilon))$,

autrement dit : $d_{euc}(v,u) < \delta \Rightarrow d_{euc}(f(v), f(u)) < \varepsilon$ /

⑤ Déf^n, exemples, et propriétés élémentaires

Puisque la notion de métrique est si utile pour les espaces euclidiens, autant essayer de la généraliser à d'autres contextes : propriétés $\rightsquigarrow$ axiomes.

Déf^n: Une métrique sur un ensemble X consiste en une application $d : X \times X \to \mathbb{R}$ telle que:

(M1) $d(x,x') = 0 \iff x = x'$, (non-dégénérescence)

(M2) $d(x,x') = d(x',x)$ $\forall x, x' \in X$, (symétrie)

(M3) $d(x,x') \leq d(x,x'') + d(x'',x)$ $\forall x, x', x'' \in X$. ($\neq$ du Δ)

Le couple (X,d) est alors un espace métrique.

Lemme: Si (X,d) est un espace métrique, alors

$$d(x,x') \geq 0 \quad \forall x, x' \in X.$$

Preuve: $0 = d(x,x) \leq d(x,x') + d(x',x) = 2\,d(x,x')$. ☒

Terminologie: Un espace métrique (X,d) est borné si $\exists\, D \in \mathbb{R}$ tq $d(x,x') \leq D$ $\forall x, x' \in X$.

Examples:

① V $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$

$$\Rightarrow d_{\langle -,- \rangle} : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} : (v,w) \longmapsto \|v-w\| = \langle v-w, v-w \rangle^{\frac{1}{2}}$$

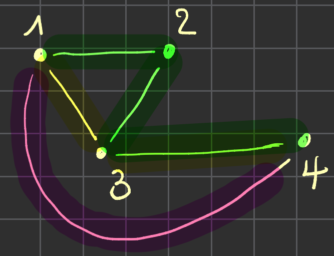
② $G = (V, E)$ graphe simple, i.e.,

- V est un ensemble, dont les éléments sont les sommets de G

- $E \subseteq \{\{v, v'\} \mid v, v' \in V\}$ est l'ensemble des arêtes de G

E.g.,

Trois chemins de 1 à 4



$V = \{1, 2, 3, 4\}$

$E = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,4\}, \{3,4\}\}$

Une métrique possible :

Etant donnée $v, w \in V$, un chemin de v à w consiste en une suite $(v_0, \dots, v_n)$ de sommets tq : $v_0 = v$, $v_n = w$ et $\{v_i, v_{i+1}\} \in E \ \forall 0 \leq i < n$.

La métrique chemin sur V déterminée par G est définie $\forall v, w \in V$ par

$$d_G(v, w) = \min\{n \mid \exists \text{ chemin } (v_0, \dots, v_n) \text{ de } v \text{ à } w\}$$