

Vérifier (M1) - (M3)

(3) Soit A un ensemble, notre "alphabet".

Poser $W_n(A) = \{ (a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A \}$ Noté: $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$

- l'ensemble des mots de longueur en A .

Une métrique possible: La métrique de Hamming

$$d_H(\underline{a}, \underline{b}) = \# \{ i \mid a_i \neq b_i \}$$

- important en théorie des codes pour corriger des erreurs de transmission.

Vérifier (M1) - (M3).

↑ Par récurrence sur n .

(4) Soit (X, d) un espace métrique. Soit W un autre ensemble.

Poser $\mathcal{F}(W, X) = \{ f: W \rightarrow X \mid f \text{ application} \}$.

Si (X, d) est bornée, alors \exists la métrique uniforme

$$d_{\text{unif}}(f, g) = \sup_{w \in W} d(f(w), g(w))$$

Remarques

- Exemples ① (pour \mathbb{R} fini, dim $V < \infty$), ② (pour $\#V < \infty$), ③ (pour $\#A < \infty$), et ④ (pour $\#W, \#X < \infty$) fournissent des exemples d'espaces métriques **finis**, très importants pour applications pratiques.

Si (X, d) est un espace métrique fini, on peut lui associer une matrice : $X = \{x_1, \dots, x_n\}$

$$\Rightarrow M(d) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \text{ où } M(d)_{ij} = d(x_i, x_j).$$

$M(d)$ est symétrique et $M(d)_{ii} = 0 \forall i$.

- Exemples ③ et ④ illustrent bien l'idée d'une métrique comme une mesure de similitude ou de ressemblance.

• Constructions : comment un nouvel espace métrique à partir d'espaces métriques donnés

• Soient (X, d) un espace métrique et soit $Y \subseteq X$.

Poser $d_Y = d|_{Y \times Y} : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R} : (y, y') \mapsto d(y, y')$.

Alors (Y, d_Y) est aussi un espace métrique, appelé le sous-espace métrique déterminé par Y .

Ex: $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$; sous-graphe;

$A =$ alphabet latin + $Y = \{a \in W_n(A) \mid \text{mots connus en anglais}\}$

• Soient $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ des espaces métriques, par ex: $(X_i, d_i) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ $\forall i$.

Une métrique possible (d'autres en exercices)

La métrique produit sur $X_1 \times \dots \times X_n$ est

$$d_{\pi} : (X_1 \times \dots \times X_n) \times (X_1 \times \dots \times X_n) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d_{\pi}((x_1, \dots, x_n), (x'_1, \dots, x'_n)) = \left(\sum_{i=1}^n d_i(x_i, x'_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

③ Applications entre espaces métriques

Pour comparer deux espaces métriques, on a besoin d'applications qui les relient et qui "préservent" la structure métrique - mais à quel degré? comment le spécifier?

Nous verrons ici quelques possibilités.

Souit (X, d_x) , (Y, d_y) des espaces métriques.

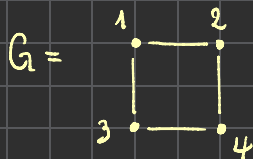
Soit $f: X \rightarrow Y$ une application.

- Isométrie : f préserve les distances si
$$d_x(x, x') = d_y(f(x), f(x')) \quad \forall x, x' \in X.$$

Rmq: f préserve les distances $\Rightarrow f$ injective

f est une isométrie si elle préserve les distances et est surjective (et donc bijective).

Ex: $A = \{a, b\}$ $W_2(A) = \{aa, ab, ba, bb\}$



• Changement d'échelle

Soit $K \in \mathbb{R}_{>0}$.

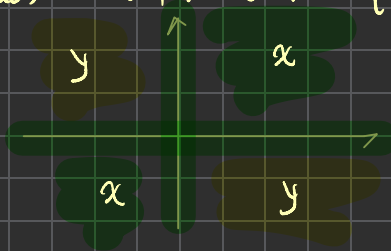
f est K -Lipschitz si $d_Y(f(x), f(x')) \leq K \cdot d_X(x, x') \quad \forall x, x' \in X$.

Ex: Soit (X, d) espace métrique. Pour tout ensemble W et tout $w_0 \in W$, l'application $ev_{w_0}: \mathcal{F}(W, X) \rightarrow X: f \mapsto f(w_0)$ est 1-Lipschitz par rapport aux métriques d_{unif} et d .

Non-ex: $(\{x, y\}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = (X, d)$

$$f: (\mathbb{R}^2, d_{\text{eucl}}) \rightarrow (X, d): v \mapsto \begin{cases} x & : v_1 v_2 \geq 0 \\ y & : v_1 v_2 < 0 \end{cases}$$

N'est K -Lipschitz pour aucun K .



• Continuité Inspirés par le cas euclidien...

f est continue si $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in X, \exists \delta > 0$ tq

$$d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Comme dans le cas euclidien, il y a une défⁿ équivalente formulée en termes de boules...

Défⁿ: Soit (X, d) un espace métrique. Soient $x \in X$ et $r > 0$. La boule ouverte centrée en x et de rayon r dans (X, d) est

$$B_d(x, r) = \{x' \in X \mid d(x, x') < r\}.$$

Proposition: $f: (X, d_x) \rightarrow (Y, d_y)$ est continue

ssi $\forall y \in Y, r > 0, \forall x \in f^{-1}(B_{d_y}(y, r))$

$\exists s > 0$ tq $B_{d_x}(x, s) \subseteq f^{-1}(B_{d_y}(y, r))$.

Preuve identique au cas euclidien.

Relations parmi ces notions

