Propriétés élémentaires :

① Tout espace connexe par arcs est connexe.

② "Etre connexe par arcs" est une propriété topologique.

Exemples : (0) $(X, \mathcal{T}_{gr})$ toujours connexe par arcs

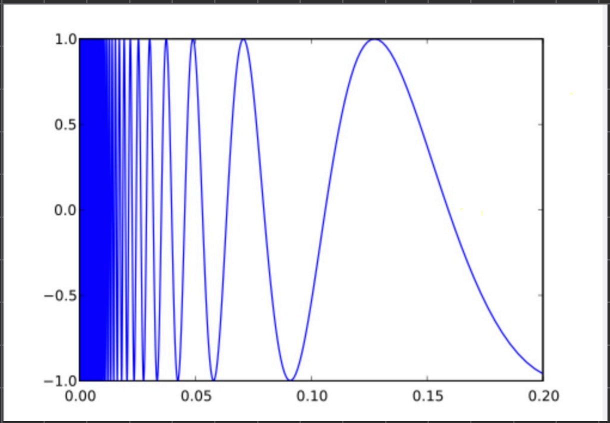
(∞) $(X, \mathcal{T}_{disc})$ connexe par arcs ssi $\# X < 2$.

(1) $X \subseteq \mathbb{R}^n$ convexe $\Rightarrow (X, (\mathcal{T}_{st})_X)$ connexe par arcs

Théorème : La courbe sinus du topologue $\bar{S}$, où

$$S = \{ (x, \sin \tfrac{1}{x}) \mid x \in]0,1] \} \subseteq \mathbb{R}^2$$

est connexe mais non connexe par arcs en tant que sous-espace de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{st})$.



Crédit : Wikipedia, Morn on Garn

© Composantes connexes (par arcs)

<u>But</u>: Formaliser la notion de décomposition d'un espace topologique en une réunion disjointe de parties connexes (par arcs) maximales.

(i) <u>Cas connexe</u>

<u>Défⁿ</u>: Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. La relation "connexité" sur X déterminée par $\mathcal{T}$ est celle définie par :

$$x \sim y \iff \exists\, A \subseteq X \text{ tq } x, y \in A \text{ et } (A, \mathcal{T}_A) \text{ connexe.}$$

<u>Lemme</u>: La relation connexité est une relation d'équivalence.

<u>Défⁿ</u>: Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, et soit $x \in X$. La composante connexe déterminée par x est sa classe d'équivalence p.r. à $\sim$.

<u>Notation</u>: C_x

Propriétés de C_x : Soient $(X, \mathcal{T})$, $x \in X$ comme ci-dessus.

① Poser $\mathscr{C}_x = \{A \subseteq X \mid x \in A, (A, \mathcal{T}_A) \text{ connexe}\}$. Alors $C_x = \bigcup_{A \in \mathscr{C}_x} A$

② $(C_x, \mathcal{T}_{C_x})$ est connexe.

③ $C_x = \overline{C_x}$

④ Si $\exists\, x_1, \dots, x_n \in X$ tq $X = \coprod_{i=1}^{n} C_{x_i}$, alors $C_x \in \mathcal{T}$ $\forall x \in X$.

Exemples: (1) $(X, \mathcal{T})$ connexe $\Rightarrow C_x = X$ $\forall x \in X$.

(∞) P. r. à $\mathcal{T}_{disc}$, $C_x = \{x\}$ $\forall x \in X$.

(2) $(X, \mathcal{T}) = (\mathbb{Q}, (\mathcal{T}_{st})_{\mathbb{Q}}) \Rightarrow C_x = \{x\}$ $\forall x \in \mathbb{Q}$

Remarque: Si $(X, \mathcal{T}) \cong (X', \mathcal{T}')$, alors ils ont le même nombre de composantes connexes.

(ii) Cas connexe par arcs

Déf^n: Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. La relation "connexité par arcs" sur X déterminée par $\mathcal{T}$ est celle définie par: $x \underset{arc}{\sim} y \iff \exists$ chemin de x vers y.

Lemme: $\underset{arc}{\sim}$ est une relation d'équivalence.

Déf^n : Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, et soit $x \in X$.
La composante connexe par arcs déterminée par x est sa classe d'équivalence p.r. à $\underset{arc}{\sim}$.
Notation : P_x

Propriétés de P_x : Soient $(X, \mathcal{T})$, $x \in X$ comme ci-dessus.

① Poser $\mathcal{P}_x = \{A \subseteq X \mid x \in A, (A, \mathcal{T}_A) \text{ connexe par arcs}\}$. Alors
$$P_x = \bigcup_{A \in \mathcal{P}_x} A.$$
② $(P_x, \mathcal{T}_{P_x})$ est connexe par arcs.

Remarque : Si $(X, \mathcal{T}) \cong (X', \mathcal{T}')$, alors ils ont le même nombre de composantes connexes par arcs.

ⓓ Versions locales de connexité

Déf^n : Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est localement connexe (par arcs) en $x \in X$ si $\forall\, \mathcal{U} \in \mathcal{T}$ tq $x \in \mathcal{U}$, $\exists$ $V \in \mathcal{T}$ tq $x \in V \subseteq \mathcal{U}$ et $(V, \mathcal{T}_V)$ est connexe (par arcs).

L'espace $(X, \mathcal{T})$ est localement connexe (par arcs) s'il l'est en tout $x \in X$.

Rmq: Localement connexe par arcs $\Rightarrow$ localement connexe

Caractérisation : Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est localement connexe (par arcs) ssi toute composante connexe (par arcs) de tout ouvert de $\mathcal{T}$ est aussi ouverte

Rmq: Par la caractérisation,

$(X, \mathcal{T})$ localement connexe (par arcs) $\Rightarrow$ toute composante connexe (par arcs) de $(X, \mathcal{T})$ est ouverte

Corollaire : Si $(X, \mathcal{T})$ est connexe et localement connexe par arcs, alors il est connexe par arcs.

Lemme: "Etre localement connexe (par arcs)" est une propriété topologique.

Exemples: 0) $(X, \mathcal{T}_{gr})$ loc. conn par arcs ∞) $(X, \mathcal{T}_{disc})$ loc conn par arcs

1) $(\bar{S}, \mathcal{T}_{\bar{S}})$ pas loc conn par arcs par le Corollaire et pas loc conn non plus, car par loc conn en $(0,0)$.

Utilité de ces notions : démontrer non-existence d'homéomorphismes

Proposition: (1) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st}) \not\cong (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{st})$

(2) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st}) \not\cong \left(\mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}, (\mathcal{T}_{st})_{\mathbb{R}\times\{0\}\cup\{0\}\times\mathbb{R}}\right)$