④ Autour de la notion de "connexe"

Rendre précis la notion intuitive du "nombre de morceaux indépendants dont un espace est composé.

ⓐ Espaces connexes

Rendre formel l'étude de décomposition d'espaces en "morceaux" par l'intermédiaire d'applications continues dont il est le domaine.

Défn non-standard!

Défⁿ: Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ vérifie la PVI si pour toute application continue $f: (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st})$ et $\forall\, x<y \in \mathrm{Im}(f)$, $[x,y] \subseteq \mathrm{Im}(f)$.

Caractérisation de la PVI: Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ ne vérifie pas la PVI ssi $\exists\, \mathcal{U}, V \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ tq $\mathcal{U} \cup V = X$ et $\mathcal{U} \cap V = \emptyset$.

Défⁿ: Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Une séparation de $(X, \mathcal{T})$ consiste en $\mathcal{U}, V \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ tq $\mathcal{U} \cup V = X$ et $\mathcal{U} \cap V = \emptyset$, ce que l'on note $\mathcal{U} | V$.

Si $(X, \mathcal{T})$ n'admet aucune séparation, alors il est connexe.

Exemples : (0) $(X, \mathcal{T}_{gr})$ toujours connexe

(∞) $(X, \mathcal{T}_{disc})$ connexe ssi $\# X < 2$.

(1) Puisque $([a,b], (\mathcal{T}_{st})_{[a,b]})$ satisfait la PVI $\forall a<b$, on sait qu'il est connexe.

Propriétés élémentaires

① $(X, \mathcal{T})$ connexe et $A \subseteq X$ ouvert et fermé p.r.à $\mathcal{T}$ $\Rightarrow A = X$ ou $A = \emptyset$.

② L'image d'un espace connexe sous une application continue est connexe.

③ $\left.\begin{array}{l} (Y, \mathcal{T}_Y) \text{ sous-esp connexe de } (X, \mathcal{T}) \\ \mathcal{U} | \mathcal{V} \text{ séparation de } (X, \mathcal{T}) \end{array}\right\} \Rightarrow Y \subseteq \mathcal{U}$ ou $Y \subseteq \mathcal{V}$.

④ "Etre connexe" est une propriété topologique.

Constructions d'espaces connexes

① (Recollement) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, et soit $\{A_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Poser $A = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Si $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ et $(A_i, \mathcal{T}_{A_i})$ connexe $\forall i \in I$, alors $(A, \mathcal{T}_A)$ aussi connexe.

② (Adhérence) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, et soit $A \subseteq X$. Si $(A, \mathcal{T}_A)$ est connexe, alors $(B, \mathcal{T}_B)$ est aussi connexe $\forall A \subseteq B \subseteq \bar{A}$.

③ Tout produit fini d'espaces connexes est connexe.

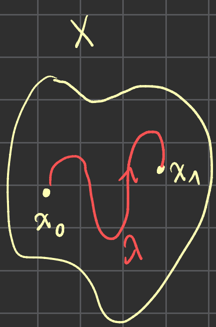
<u>Exemple:</u> $\left([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n], (\mathcal{T}_{st})_{[a_1,b_1]} * \cdots * (\mathcal{T}_{st})_{[a_n,b_n]}\right)$ connexe

D) Espaces connexes par arcs

Une notion de "connexité" encore plus intuitive ...

Etudier un espace en termes d'applications continues dont il est le codomaine.

<u>Déf^n:</u> Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, et soient $x_0, x_1 \in X$.



Un chemin dans $(X, \mathcal{T})$ de x_0 à x_1 consist en une application continue $\lambda : \left([0,1], (\mathcal{T}_{st})_{[0,1]}\right) \to (X, \mathcal{T})$ tq $\lambda(0) = x_0$, $\lambda(1) = x_1$.

L'espace $(X, \mathcal{T})$ est connexe par arcs s'il existe un chemin de x_0 à x_1, $\forall x_0, x_1 \in X$.

Propriétés élémentaires :

① Tout espace connexe par arcs est connexe. (Exo)

② "Etre connexe par arcs" est une propriété topologique.

② $[0,1] \xrightarrow{\lambda} X \xrightarrow{h} X'$ # cpstes inv. top

Exemples : (0) $(X, \mathcal{T}_{gr})$ toujours connexe par arcs

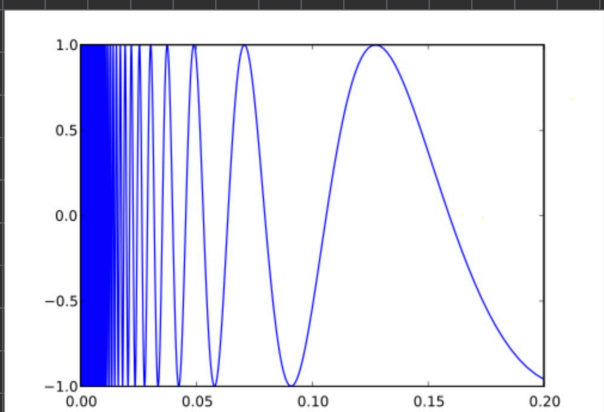
(∞) $(X, \mathcal{T}_{disc})$ connexe par arcs ssi $\# X < 2$.

(1) $X \subseteq \mathbb{R}^n$ convexe $\Rightarrow (X, (\mathcal{T}_{st})_X)$ connexe par arcs

Théorème : La courbe sinus du topologue $\bar{S}$, où

$$S = \{ (x, \sin \tfrac{1}{x}) \mid x \in]0,1] \} \subseteq \mathbb{R}^2$$

est connexe mais non connexe par arcs en tant que sous-espace de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{st})$.



Crédit : Wikipedia, Mormon Gorn