EPFL – Automne 2025	D. Strütt
Analyse III – CGC GC SIE	**Exercices**
Série 9	13 novembre 2025

Remarque.
Certains exercices proviennent du livre *Analyse Avancée pour Ingénieurs*, par B. Dacorogna et C. Tanteri.

Exercice 1 (ex 7.7 p. 89, corrigé p. 97).
Vérifier le théorème de Stokes pour $F(x,y,z) = (0, x^2, 0)$ et Σ le triangle de sommets $(1,0,0), (2,2,0)$ et $(1,1,0)$.

Exercice 2 (ex 7.6 p. 89, corrigé p. 96).
Vérifier le théorème de Stokes pour $F(x,y,z) = \big(0, 0, y + z^2\big)$ et

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x,y,z \geq 0,\ 0 \leq \arccos\frac{z}{2} \leq \arctan\frac{y}{x} \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Exercice 3 (ex 14.1 p. 219, corrigé p. 223).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique telle que $f(x) = e^{(x-\pi)}$ sur $[0, 2\pi[$.

(i) Esquisser le graphe de f et le graphe de f'.

(ii) Calculer la série de Fourier Ff de la fonction f.

(iii) A l'aide du théorème de Dirichlet, comparer Ff et f sur $[0, 2\pi]$.

(iv) A l'aide des deux questions précédentes, montrer que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi}{e^{\pi} - e^{-\pi}}.$$

Exercice 4 (ex 14.2 p. 220, corrigé p. 224).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique telle que $f(x) = (x - \pi)^2$ sur $[0, 2\pi[$.

(i) Esquisser le graphe de f et le graphe de f'.

(ii) Calculer la série de Fourier Ff de la fonction f.

(iii) A l'aide du théorème de Dirichlet, comparer Ff et f sur $[0, 2\pi]$.

(iv) En déduire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 5.
Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et périodiques de période 2π. On considère la fonction

$$h(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,dt.$$

(i) Exprimer les coefficients de Fourier **complexes** de h en fonction de ceux de f et g.
Suggestion : Utilisez une feinte du loup $x = x - t + t$

(ii) En déduire les coefficients de Fourier **réels** de h en fonction de ceux de f et g.

Solution des exercices calculatoires

Exercice 1 $\pm\frac{4}{3}$

Exercice 2 $\pm\left(\frac{8}{3}-\pi\right)$

Exercice 3 (ii)

$$\begin{aligned} Ff(x) = &\ \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)}\cos(nx) - \frac{2n\sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)}\sin(nx)\right) \\ = &\ \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi(1+n^2)}\cos(nx) + \frac{n\left(e^{-\pi}-e^{\pi}\right)}{\pi(1+n^2)}\sin(nx)\right) \end{aligned}$$

Exercice 4 (ii) $Ff(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cos(nx)$.