

Remarque.

Certains exercices proviennent du livre *Analyse Avancée pour Ingénieurs*, par B. Dacorogna et C. Tanteri.

Exercice 1 (ex 6.3 p. 66, corrigé p. 71).

Vérifier le théorème de la divergence pour $F(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ et

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1 - x - y, 0 < y < 1 - x, 0 < x < 1 \right\}.$$

Exercice 2 (ex 6.6 p. 66, corrigé p. 74).

Vérifier le théorème de la divergence pour $F(x, y, z) = (x, y, z)$ et

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4 \text{ et } x^2 + y^2 < 3z \right\}.$$

Exercice 3 (ex 6.9 p. 67, corrigé p. 76).

Vérifier le théorème de la divergence pour $F(x, y, z) = (2, 0, xy^2 + z^2)$ et

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, 0 < z < 2 \text{ et } 4(x^2 + y^2) < (z - 4)^2 \right\}.$$

Exercice 4 (ex 6.11 p. 67, corrigé p. 81).

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier et ν un champ de normales unités extérieures à Ω . Soient les champs vectoriels F, G_1, G_2 et G_3 définis par

$$F(x, y, z) = (x, y, z), \quad G_1(x, y, z) = (x, 0, 0), \quad G_2(x, y, z) = (0, y, 0), \quad G_3(x, y, z) = (0, 0, z).$$

Montrer que :

$$(i) \text{ Volume}(\Omega) = \frac{1}{3} \iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, ds$$

$$(ii) \text{ Volume}(\Omega) = \iint_{\partial\Omega} \langle G_i, \nu \rangle \, ds \text{ pour } i = 1, 2, 3.$$

Exercice 5 (ex 7.2 page 89, corrigé p. 91).

Vérifier le théorème de Stokes pour $F(x, y, z) = (x^2y, z, x)$ et

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^4, 0 \leq z \leq 1 \right\}.$$

Exercice 6 (Ex 7.5 page 89, corrigé p. 94).

Vérifier le théorème de Stokes pour $F(x, y, z) = (0, z^2, 0)$ et

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq z \leq \sqrt{3} \right\}.$$

Solution des exercices calculatoires

Exercice 1 $\frac{1}{8}$

Exercice 2 $\frac{19\pi}{2}$

Exercice 3 $\frac{11\pi}{3}$

Exercice 5 $\pm \frac{\pi}{4}$

Exercice 6 $\pm \left(2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\right)$