EPFL – Automne 2025	D. Strütt
Analyse III – CGC GC SIE	**Exercices**
Série 7	30 octobre 2025

Remarque.
Certains exercices proviennent du livre *Analyse Avancée pour Ingénieurs*, par B. Dacorogna et C. Tanteri.

Exercice 1.
Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière orientable avec un champ de normales unités ν. On considère $F : \Sigma \mapsto \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel continu. Montrer que le flux de F à travers la surface Σ dans la direction ν est égal à l'integrale du champ scalaire $F \cdot \nu$ sur Σ.

Exercice 2 (ex 5.3 p. 57, corrigé p. 58)**.**
Soit $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}$.
Calculer la masse de la surface Σ sachant que la densité est $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Indication : Pour la paramétrisation, voir série 6 exercice 2.

Exercice 3 (ex 5.5 p. 57, corrigé p. 60)**.**
Soit $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.
Calculer l'aire de $\partial\Omega$.

Exercice 4 (ex 5.2 p. 57, corrigé p.58)**.**
Soient $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ et

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\right\}.$$

Calculer le flux passant à travers Σ dans la direction ascendante (c'est-à-dire dans la direction des $z > 0$).

Exercice 5 (ex 5.4 p. 57, corrigé p. 58)**.**
Soient $F(x, y, z) = (0, z, z)$ et

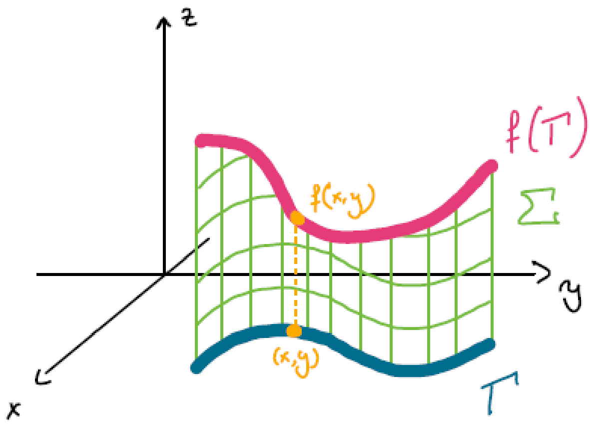
$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 6 - 3x - 2y \text{ et } x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\right\}.$$

Calculer le flux qui passe par cette surface et qui s'éloigne de l'origine.

Exercice 6 (ex 5.7 p. 57, corrigé p. 61)**.**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $f \in C^1(\bar{\Omega})$ un champ scalaire tel que $f(x, y) > 0$ pour tout $(x, y) \in \bar{\Omega}$. On considère une courbe simple, régulière $\Gamma \subset \Omega$ et la surface $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ définie par

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Gamma \text{ et } 0 \leq z \leq f(x, y)\right\}.$$

Montrer que Aire $(\Sigma) = \displaystyle\int_\Gamma f dl$



Remarque : Ce résultat peut s'interpréter de la façon suivante : L'intégrale curviligne d'un champ scalaire de $\mathbb{R}^2$ donne l'aire de la surface entre Γ et le graphe de f.

Exercice 7 (ex 6.4 page 66, corrigé p. 72)**.**
Vérifier le théorème de la divergence pour $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ et
$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : b^2\left(x^2 + y^2\right) < a^2 z^2 \text{ et } 0 < z < b\right\}$.

Solution des exercices calculatoires

Exercice 2 $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$

Exercice 3 $\pi + \frac{\pi}{6}(5^{3/2} - 1)$

Exercice 4 $\frac{\pi}{2}$

Exercice 5 18

Exercice 7 $\frac{\pi}{2}a^2b^2$