Remarque.
Certains exercices proviennent du livre *Analyse Avancée pour Ingénieurs*, par B. Dacorogna et C. Tanteri.

Exercice 1 (Ex 4.8 et 4.7 pages 43 et 42, corrigé p. 51)**.**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine régulier dont le bord $\partial\Omega$ est orienté positivement. Soit ν un champ de normales unités extérieures à Ω. Soient F un champ vectoriel tel que $F \in C^1\left(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2\right)$ et f un champ scalaire tel que $f \in C^2\left(\bar{\Omega}\right)$. Montrer que :

(i) **Théorème de la divergence dans le plan** :

$$\iint\limits_{\Omega} \operatorname{div} F\,(x,y)\,dxdy = \int\limits_{\partial\Omega} \langle F, \nu\rangle\, dl$$

Indication : écrire $F = (F_1, F_2)$ et appliquer le théorème de Green au champ vectoriel $\Phi = (-F_2, F_1)$ en se référant au §2.4 du cours.

(ii) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \Delta f\,(x,y)\,dxdy = \int\limits_{\partial\Omega} \langle \nabla f, \nu\rangle\, dl.$

Exercice 2 (Ex 5.1 p. 56, corrigé p. 57)**.**
Soient $f(x,y,z) = xy + z^2$ et

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = z^2 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\right\}.$$

Calculer $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} f ds$

Exercice 3 (Ex 5.6 p. 57, corrigé p. 60)**.**
Soit $0 < a < R$. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère le tore Ω obtenu par rotation du disque $(x-R)^2 + z^2 \leq a^2$ autour de l'axe Oz et sa représentation décrite par

$$x = (R + r\cos\varphi)\cos\theta, \qquad y = (R + r\cos\varphi)\sin\theta, \qquad z = r\sin\varphi$$

avec $0 < r < a$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

(i) Dessiner Ω et indiquer ce que représentent r, θ et φ.

(ii) Calculer le Jacobien de la transformation qui décrit Ω en termes des variables r, θ et φ.

(iii) Calculer le volume de Ω.

(iv) Ecrire une paramétrisation régulière de la surface du tore (notée $\partial\Omega$) et calculer une normale à $\partial\Omega$.

(v) Calculer l'aire de $\partial\Omega$.

(vi) Calculer $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

Les exercices suivants sont une révision d'analyse II

Exercice 4. (i) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\}$.

Calculer $\displaystyle\iint_D \sqrt{1-x-y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

(ii) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2(x + \sqrt{x^2+y^2})\}$.

Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{4}}}$

Indication : Ne pas essayer de faire un dessin. De plus, on pourra utiliser que $2\cos^2(\theta/2) = 1 + \cos(\theta)$.

(iii) Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\, y \geq 0,\, z \geq 0,\, z \leq 1 - y^2 \text{ et } x + y \leq 1\}$.

Indication : Si un dessin est faisable, ça n'aide pas beaucoup à l'exercice.

Calculer $\displaystyle\iiint_D z\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$

Exercice 5.
Calculer le volume de :

(i) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 \leq z\}$.

(ii) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq \sqrt{2},\; x^2 + y^2 \leq 1,\; x \geq 0,\; y \geq 0 \text{ et } z \geq 0\}$.

Suggestion : Selon la méthode utilisée, la primitive suivante peut être utile (qu'on trouve avec le changement de variables $x = \cos(t)$) :

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} - \arccos(x)\right).$$

Solution des exercices calculatoires

Exercice 2 $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

Exercice 3 (ii) $r(R + r\cos\varphi)$

(iii) $2\pi^2 Ra^2$

(v) $4\pi^2 Ra$

(vi) $\frac{\pi^2 Ra^4}{2}$

Exercice 4 (i) $\frac{4}{15}$

(ii) 16

(iii) $\frac{11}{60}$

Exercice 5 (i) $\frac{\pi}{12}\left(3\sqrt{5} - 1 - 8\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{5\pi}{12}(3 - \sqrt{5})$

(ii) $\frac{\sqrt{2}\pi}{4} - \frac{2}{3}$