

Remarque.

Certains exercices proviennent du livre *Analyse Avancée pour Ingénieurs*, par B. Dacorogna et C. Tanteri.

Aide-mémoire : pour vérifier le Théorème de Green (e.g. exercices 1 et 2), appliquer les étapes suivantes :

- (i) Calculer $\text{rot}F(x, y)$.
- (ii) Essayer d'esquisser le domaine Ω , avec son bord $\partial\Omega$. Indiquer le sens de parcours de $\partial\Omega$ afin que ce dernier soit orienté positivement.
- (iii) Paramétrer le domaine Ω , et utiliser cette paramétrisation pour calculer

$$\iint_{\Omega} \text{rot}F \, dx dy.$$

- (iv) Paramétrer le bord $\partial\Omega$ de Ω , et utiliser cette paramétrisation pour calculer

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dl.$$

- (v) Vérifier la conclusion du théorème de Green pour Ω et F .

Exercice 1 (ex 4.1 et 4.2 p. 41, corrigé p. 44).

Vérifier le théorème de Green dans les cas suivants :

- (i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ et $F(x, y) = (xy, y^2)$
- (ii) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ et $F(x, y) = (x + y, y^2)$.

Exercice 2 (ex 4.4i et 4.5 p. 42, corrigé p. 46).

Vérifier le théorème de Green dans les cas suivants :

- (i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 < 1\}$ et $F(x, y) = (-x^2y, xy^2)$
- (ii) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1 \text{ et } x^2 - 4 < y < 2\}$ et $F(x, y) = (xy, y)$.

Indication : Il sera difficile de paramétrer le domaine avec une seule paramétrisation. Essayez de dessiner le domaine A puis, vous avez deux options :

- Calculer $\iint_A \text{rot} F(x, y) dx dy$ comme une intégrale moins une autre. (Recommandé car plus rapide)
- Séparer le domaine en quatre parties x -simples ou y -simples. (Pas recommandé car plus long)

Exercice 3 (ex 4.3 p. 42, corrigé p. 45).

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ le triangle de sommets $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$. Soit $f(x, y) = y + e^x$. Calculer :

- (i) $\int_{\Omega} \Delta f(x, y) \, dx \, dy$

- (ii) $\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \nu_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \nu_2 \right) dl$ où $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ est la normale extérieure unitaire à $\partial\Omega$.

Exercice 4 (ex 4.9i p. 43, corrigé p. 51).

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine régulier dont le bord $\partial\Omega$ est orienté positivement. Soient les champs vectoriels F , G_1 et G_2 définis par

$$F(x, y) = (-y, x), \quad G_1(x, y) = (0, x) \quad \text{et} \quad G_2(x, y) = (-y, 0).$$

Montrer que :

$$(i) \text{ Aire}(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} F \cdot dl$$

$$(ii) \text{ Aire}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} G_1 \cdot dl$$

$$(iii) \text{ Aire}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} G_2 \cdot dl$$

Solution des exercices calculatoires

- Exercice 1 (i) 0
(ii) -3π
- Exercice 2 (i) $\frac{3\pi}{2}$
(ii) 0
- Exercice 3 (i) $e - 2$
(ii) $e - 2$