

**Remarque.**

Certains exercices proviennent du livre *Analyse Avancée pour Ingénieurs*, par B. Dacorogna et C. Tanteri.

**Exercice 1** (ex 3.1, p. 27, corrigé p. 30).

Parmis les champs vectoriels  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ci-dessous, lesquels dérivent d'un potentiel? Si il dérivent d'un potentiel, donner un potentiel, sinon, trouver un chemin fermé  $\Gamma$  tel que  $\int_{\Gamma} F \cdot dl \neq 0$ .

- (i)  $F(x, y) = (y, xy - x)$
- (ii)  $F(x, y) = (3x^2y + 2x, x^3)$
- (iii)  $F(x, y) = (3x^2y, x^2)$ .

**Exercice 2** (ex 3.3, p. 28, corrigé p. 32).

Soit  $F(x, y, z) = \left( 2xy + \frac{z}{1+x^2}, x^2 + 2yz, y^2 + \arctan x \right)$ .

Le champ  $F$  dérive-t-il d'un potentiel sur  $\mathbb{R}^3$ ? Si oui, trouver ce potentiel.

**Exercice 3** (ex 3.8, p. 29, corrigé p. 36).

Pour les champs vectoriels  $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  ci-dessous, dérivent-ils d'un potentiel? Si oui, donner un potentiel, si non, justifier votre réponse

- (i)  $F(x, y) = \left( \frac{-x}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-y}{(x^2 + y^2)^2} \right)$
- (ii)  $F(x, y) = \left( \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \right)$

**Exercice 4** (ex 3.6, p. 28, corrigé p. 34).

Soit l'équation différentielle

$$F_2(t, u(t))u'(t) + F_1(t, u(t)) = 0 \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}.$$

Soit  $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$  un champ vectoriel qui dérive d'un potentiel  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

- (i) Montrer qu'une solution  $u(t)$  de l'équation différentielle est donnée, sous forme implicite, par

$$f(t, u(t)) = \text{constante} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

*Indication :* Calculer  $\frac{d}{dt} f(t, u(t))$ .

- (ii) En déduire une solution de

$$u^2(t)u'(t) + \sin t = 0 \quad \text{pour } t \in \mathbb{R} \text{ avec la condition initiale } u(0) = 3.$$

**Exercice 5** (ex 3.2, p. 27, corrigé p. 31).

Soit  $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un champ tel que  $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  et  $\text{rot } F = 0$ .

Soit  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\varphi(x, y) = \int_0^1 xF_1(tx, ty) + yF_2(tx, ty)dt.$$

- (i) Montrer que  $\nabla\varphi(x, y) = F(x, y)$ , i.e.  $\varphi$  est un potentiel de  $F$ .

*Indication :* Calculer  $\frac{d}{dt}[tF_1(tx, ty)]$  et  $\frac{d}{dt}[tF_2(tx, ty)]$

- (ii) En déduire un potentiel pour  $F(x, y) = (2xy, x^2 + y)$ .
- (iii) Comparer l'expression pour  $\varphi$  du premier point avec la formule donnée dans l'esquisse de la démonstration du Théorème 2.10 du cours.

### Solution des exercices calculatoires

Exercice 1 (i) Ne dérive pas d'un potentiel.

(ii) Dérive d'un potentiel.

(iii) Ne dérive pas d'un potentiel.

Exercice 2  $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z \arctan x$  à une constante près.

Exercice 3 (i) Dérive d'un potentiel.

(ii) Ne dérive pas d'un potentiel

Exercice 4 (ii)  $(24 + 3 \cos t)^{\frac{1}{3}}$

Exercice 5 (ii)  $x^2y + \frac{1}{2}y^2$