

Remarque.

Certains exercices proviennent du livre *Analyse Avancée pour Ingénieurs*, par B. Dacorogna et C. Tanteri.

Exercice 1.

Paramétrer les courbes suivantes

- (i) $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 3 = y^2, x \leq 3\}$
- (ii) $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\}$
- (iii) $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 2(2x + 1)y + (2x + 1)^2 = 0, 1 \leq y \leq 3\}$
- (iv) $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 9, y \geq x\}$.

Exercice 2 (ex 2.1, p. 17, corrigé p. 18).

- (i) Soit $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), x \in [a, b]\}$. Montrer que :

$$\text{longueur}(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

- (ii) En déduire la longueur de la courbe

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \cosh x, x \in [0, 1]\}.$$

- (iii) Soit $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = r(t) \cos t; y(t) = r(t) \sin t, t \in [a, b]\}$.

Calculer la longueur de Γ en fonction de r .

Exercice 3 (ex 2.4, p. 18, corrigé p. 20).

Calculer $\int_{\Gamma} f dl$ lorsque $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + \sqrt{2z}$ et

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) = \left(\cos t, \sin t, \frac{1}{2}t^2 \right) : t \in [0, 1] \right\}.$$

Indication : $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log(x + \sqrt{x^2 + a^2})$.

Exercice 4 (ex 2.2, p. 17, corrigé p. 19).

On considère $F(x, y) = (xy, y^2 - x)$ et

$$\Gamma_1 = \{(t, t) : t \in [0, 1]\}, \quad \Gamma_2 = \{(t, e^t) : t \in [0, 1]\}, \quad \Gamma_3 = \{(\sqrt{t}, t^2) : t \in [1, 2]\}.$$

Calculer $\int_{\Gamma_i} F \cdot dl$ pour $i = 1, 2, 3$.

Exercice 5 (ex 2.3, p. 17, corrigé p. 19).

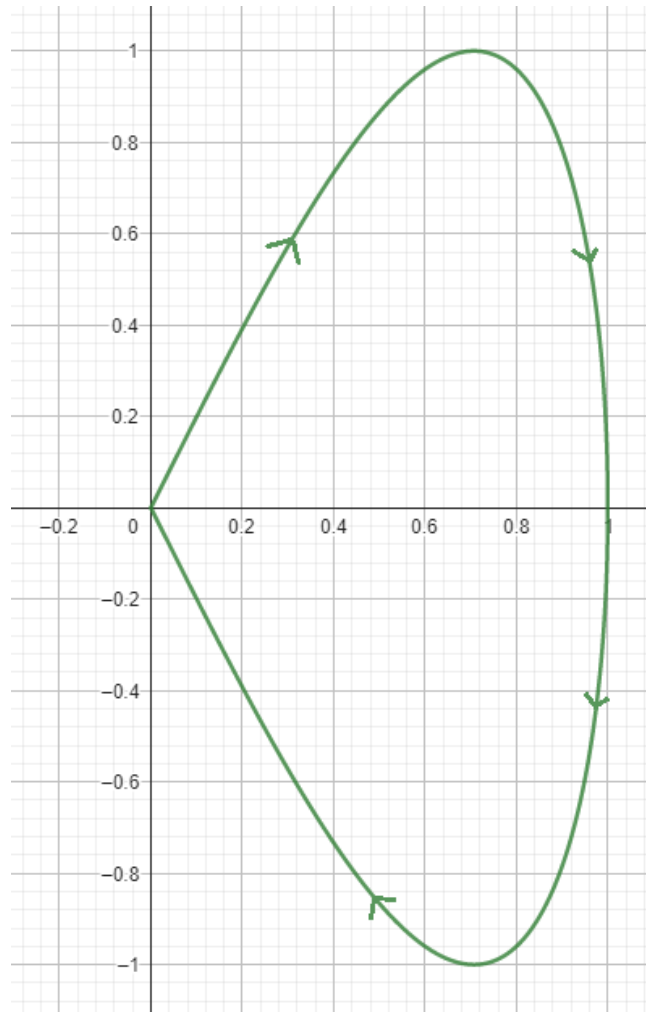
Calculer $\int_{\Gamma} F \cdot dl$ quand

- (i) $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$, $F(x, y, z) = (x, z, y)$;
- (ii) $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = e^x, z = x, x \in [0, 1]\}$, $F(x, y, z) = (x, y, z)$.

Exercice 6 (ex 2.6, p. 18, corrigé p. 20).

Soient $F(x, y) = (x + y, -x)$ et $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + 4x^4 - 4x^2 = 0, x \geq 0\}$ paramétrée par $\gamma(t) = (\sin t, \sin(2t))$ avec $t \in [0, \pi]$.

1. Montrer que γ est bien une paramétrisation de Γ .
2. Calculer $\int_{\Gamma} F \cdot dl$.



Solution des exercices calculatoires

Exercice 2 (ii) $\frac{e-e^{-1}}{2}$

(iii) $\int_a^b \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2} dt$

Exercice 3 $-\frac{1}{3} + \frac{7\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2})$

Exercice 4

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dl = \frac{1}{6}$$

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dl = \frac{1}{3}(e^3 - 1)$$

$$\int_{\Gamma_3} F \cdot dl = \frac{689}{30} - \frac{16}{5}\sqrt{2}$$

Exercice 5 (i) 0

(ii) $\frac{1+e^2}{2}$