

Remarque.

Les théorèmes énoncés dans la présente série sont des rappels d'analyse II

Notation.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert, $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, tel que $\mathbf{F} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $1 \leq i \leq n$. On note

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial F_n}{\partial x_i} \right).$$

Exercice 1.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert, $\mathbf{F}, \mathbf{G} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $1 \leq i \leq n$. Montrer que

(i)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [\langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle] = \left\langle \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i}, \mathbf{G} \right\rangle + \left\langle \mathbf{F}, \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_i} \right\rangle,$$

où pour $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, on note $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ le *produit scalaire euclidien* de \mathbf{a} et \mathbf{b} , c'est-à-dire,

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

(ii) si $n = 3$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [\mathbf{F} \wedge \mathbf{G}] = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} \wedge \mathbf{G} + \mathbf{F} \wedge \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_i}$$

où pour $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, on note $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ le *produit vectoriel* de \mathbf{a} et \mathbf{b} , c'est-à-dire,

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Théorème.

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega' \subset \mathbb{R}^m$ $f \in C^1(\Omega')$ et $g = (g_1, \dots, g_m) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tel que $g(\Omega) \subset \Omega'$. Alors, le produit de composition $f \circ g \in C^1(\Omega)$ et pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(g(x)) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x).$$

Exercice 2. (i) Soit $p \geq 1$ et la fonction

$$h_p(x) := |x|^p = \left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right)^p, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Calculer $\nabla h_p(x)$.

(ii) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, une application $\mathbf{G} \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ qui ne s'annule jamais et la fonction

$$f_p(t) := \frac{1}{p} |\mathbf{G}(tx)|^p, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

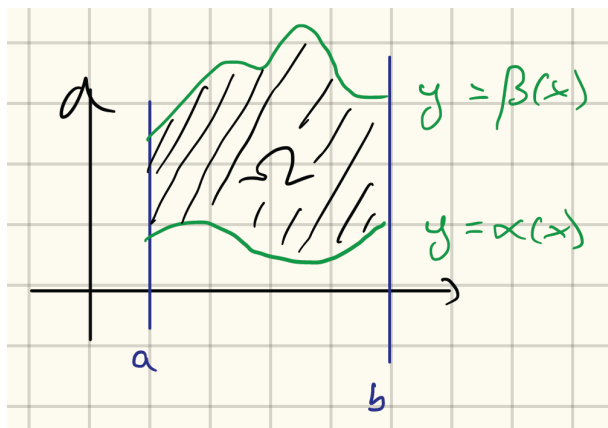
Calculer $\frac{d}{dt} f_p(t)$.

Définition.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

- (i) On dit que Ω est *y-simple* si il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $\alpha, \beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\forall x \in]a, b[, \alpha(x) < \beta(x)$ tels que

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

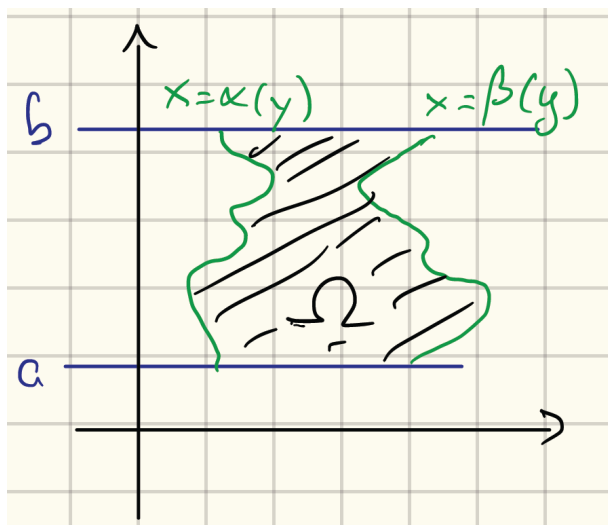


On a alors que

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy dx.$$

- (ii) On dit que Ω est *x-simple* si il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $\alpha, \beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\forall y \in]a, b[, \alpha(y) < \beta(y)$ tels que

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [a, b], \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$$



On a alors que

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx dy.$$

Exercice 3.

Esquisser l'ensemble A et calculer $\int_A f(x) dx$ dans les cas suivants :

- (i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], 0 \leq y \leq x\}$, $f(x, y) = xy$.
- (ii) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2x, x \geq 1\}$, $f(x, y) = \frac{2}{x}$.
- (iii) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3, x - 3 \leq y \leq 3 - x\}$ et $f(x, y) = x^2 + \sin^3(y)$
- (iv) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y, \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\}$, $f(x, y) = y \sin(xy)$.

Définition (Matrice jacobienne, Jacobien).

Soit $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n): \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega' \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ telle que

- $\mathbf{u} \in C^\infty(\Omega; \Omega')$
- \mathbf{u} est inversible et $\mathbf{u}^{-1} \in C^\infty(\Omega'; \Omega)$

La *matrice Jacobienne* de \mathbf{u} notée $\nabla \mathbf{u}$ est la matrice dont les composantes sont

$$(\nabla \mathbf{u})_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Le *jacobien* de \mathbf{u} , noté $\text{Jac } \mathbf{u}(\mathbf{x})$ est défini par

$$\text{Jac } \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \det \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})$$

Théorème (Voir aussi §8.5 du livre *Analyse avancée pour ingénieurs*).

Soit $f: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $\mathbf{u}: \Omega \rightarrow \Omega'$ comme dans la définition ci-dessus et $A \subset \Omega'$ un ensemble fermé borné. Alors

$$\int_A f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\mathbf{u}^{-1}(A)} f(\mathbf{u}(\mathbf{x})) |\text{Jac } \mathbf{u}(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$$

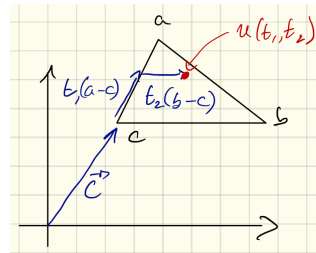
Exercice 4.

On admettra sans démonstration que si $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2), c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ sont trois points non-alignés $A = \{(t_1, t_2) : 0 \leq t_1 \leq 1, 0 \leq t_2 \leq 1 - t_1\}$ et $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est définie par

$$u(t_1, t_2) = t_1 a + t_2 b + (1 - t_1 - t_2)c = c + t_1(a - c) + t_2(b - c),$$

Alors,

- u est inversible,
- $u, u^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$,
- $u(A)$ est le triangle de sommets a, b et c .



- (i) Calculer le jacobien de u .
- (ii) Calculer l'aire d'un triangle en fonction de ses trois sommets a, b et c .
Rappel : L'aire d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est donnée par

$$\iint_{\Omega} 1 dx dy$$

Exercice 5 (Voir aussi §8.5 du livre *Analyse avancée pour ingénieurs*).

Calculer le jacobien des applications suivantes :

- (i) Les coordonnées polaires

$$\mathbf{u}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

- (ii) Les coordonnées sphériques

$$\mathbf{u}(r, \theta, \varphi) = (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi)$$

- (iii) Les coordonnées cylindriques

$$\mathbf{u}(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

(iv) Les coordonnées carthésiennes.

$$\mathbf{u}(x, y, z) = (x, y, z)$$

Exercice 6.

Esquisser l'ensemble A et calculer $\int_A f(x)dx$ dans les cas suivants :

(i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ et $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$

(ii) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 3\}$ et $f(x, y, z) = \frac{z}{\pi\sqrt{x^2+y^2}}$

(iii) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$ et $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Rappel :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (t - \sin(t) \cos(t)) \right] = \sin^2(t)$$
$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (t + \sin(t) \cos(t)) \right] = \cos^2(t)$$

Remarque.

Le but de l'exercice suivant est d'établir des formules qui nous permettent de trouver une primitive des fonctions $\sin^n(x)$ et $\cos^n(x)$ qui seront utiles dans les calculs tout au long du semestre.

Exercice 7. (i) (Facultatif) Soit $n \geq 1$ un entier. À l'aide des formules d'Euler, et du binôme de Newton, montrer que si n est pair,

$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{n/2} + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{k} \cos((n-2k)x)$$

$$\sin^n(x) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{n/2} + \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n/2-1} (-1)^k \binom{n}{k} \cos((n-2k)x)$$

Et si n est impair,

$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{k} \cos((n-2k)x)$$

$$\sin^n(x) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \binom{n}{k} \sin((n-2k)x)$$

Indication : Pour le sinus, utiliser que si n est pair $(-1)^{n-k} = (-1)^k$ et si n est impair, $(-1)^{n-k} = -(-1)^k$

(ii) Trouver une primitive des fonctions suivantes :

(a) $\cos^2(x)$

(c) $\cos^3(x)$

(e) $\cos^4(x)$

(g) $\cos^5(x)$

(b) $\sin^2(x)$

(d) $\sin^3(x)$

(f) $\sin^4(x)$

(h) $\sin^5(x)$.

Solution des exercices calculatoires

Exercice 2 (i) $\nabla h_p(x) = p|x|^{p-2}x$

(ii) $\frac{df_p}{dt} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\mathbf{G}(tx)|^{p-2} G_i(tx) \frac{\partial G_i}{\partial v_j}(tx) x_j$

Exercice 3 (i) $\frac{1}{8}$

(ii) 1

(iii) $\frac{27}{2}$

(iv) 0

Exercice 4 (i) $\text{Jac}(u)(t_1, t_2) = a_1b_2 + b_1c_2 + a_2c_1 - a_2b_1 - b_2c_1 - a_1c_2.$

(ii) $\frac{1}{2}|a_1b_2 + b_1c_2 + a_2c_1 - a_2b_1 - b_2c_1 - a_1c_2|$

Exercice 5 (i) r

(ii) $-r^2 \sin(\varphi)$

(iii) r

(iv) 1

Exercice 6 (i) 4π

(ii) 9

(iii) $\frac{81}{4}\pi^2$

Exercice 7 (ii) (a) $\int \cos^2(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin(2x)$

(b) $\int \sin^2(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin(2x)$

(c) $\int \cos^3(x) = \frac{3}{4} \sin(x) + \frac{1}{12} \sin(3x)$

(d) $\int \sin^3(x) = -\frac{3}{4} \cos(x) + \frac{1}{12} \cos(3x)$

(e) $\int \cos^4(x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{32} \sin(4x)$

(f) $\int \sin^4(x) = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{32} \sin(4x)$

(g) $\int \cos^5(x) = \frac{5}{8} \sin(x) + \frac{5}{48} \sin(3x) + \frac{1}{80} \sin(5x)$

(h) $\int \sin^5(x) = -\frac{5}{8} \cos(x) + \frac{5}{48} \cos(3x) - \frac{1}{80} \cos(5x)$