Exercice 1. (*i*) Soient $w, \xi > 0$, $f, \varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par

$$f(x) = x^2 e^{-w^2x^2}$$

$$\varphi(x) = \frac{2w^2 + \xi^2 - 4w^4x^2}{4w^4} e^{-w^2x^2}.$$

Montrer (en utilisant les tables et les propriétés des transformées de Fourier) que

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{2w^2 - \alpha^2}{4\sqrt{2}w^5} e^{-\frac{\alpha^2}{4w^2}}$$

$$\hat{\varphi}(\alpha) = \frac{\xi^2 + \alpha^2}{4\sqrt{2}w^5} e^{-\frac{\alpha^2}{4w^2}}$$

(*ii*) Trouver $u \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution de

$$u(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} u''(t) e^{-\sqrt{2}|x-t|} dt = x^2 e^{-x^2}$$

Exercice 2.
Trouver $u \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique solution de

$$u''(x) - 2u(x+\pi) = 3 + \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

Indication : On pourra utiliser :

$$\begin{aligned} 2\sin(a)\sin(b) &= \cos(a-b) - \cos(a+b) \\ \sin(n(x \pm \pi)) &= (-1)^n \sin(nx) \\ \cos(n(x \pm \pi)) &= (-1)^n \cos(nx) \end{aligned}$$

Exercice 3 (*Facultatif* : Valeurs propres et vecteurs propres de la dérivée seconde)**.**
Déterminer les paramètres $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels il existe $u_\lambda \in C^2(\mathbb{R})$, 2π-périodique, non nulle telle que

$$u''(x) = \lambda u(x).$$

Un échantillon d'exercices QCM

Exercice 4.
Soit
$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 < \frac{\pi^2}{4},\ |z| < \cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right\}.$$
Alors, le bord de Ω, $\partial\Omega$ a deux parties :
$$\Sigma_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 < \frac{\pi^2}{4},\ z = \cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right\},$$
paramétrée par
$$\alpha(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), \cos(r)), \qquad r \in [0,\pi/2], \theta \in [0,2\pi],$$
et
$$\Sigma_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 < \frac{\pi^2}{4},\ z = -\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right\},$$
paramétrée par
$$\beta(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), -\cos(r)), \qquad r \in [0,\pi/2], \theta \in [0,2\pi],$$
Considérons les normales associées $\alpha_r \wedge \alpha_\theta$ et $\beta_r \wedge \beta_\theta$. Alors :

- ☐ $\alpha_r \wedge \alpha_\theta$ et $\beta_r \wedge \beta_\theta$ sont toutes deux extérieures.
- ☐ $\alpha_r \wedge \alpha_\theta$ et $\beta_r \wedge \beta_\theta$ sont toutes deux intérieures.
- ☐ $\alpha_r \wedge \alpha_\theta$ est extérieure et $\beta_r \wedge \beta_\theta$ est intérieure.
- ☐ $\alpha_r \wedge \alpha_\theta$ est intérieure et $\beta_r \wedge \beta_\theta$ est extérieure.

Exercice 5.
Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x \le -\frac{\pi}{2} \\ x^2 & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases} \qquad \text{étendue par } 2\pi\text{-périodicité}$$
et $Ff(x)$, sa série de Fourier. Alors :

- ☐ $\forall x \in]-\pi,\pi]$, $Ff(x) = x^2$.
- ☐ $\forall x \in]-\pi,\pi]$,
$$Ff(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x \le -\frac{\pi}{2} \\ x^2 & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$
- ☐ $\forall x \in]-\pi,\pi]$,
$$Ff(x) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{8} & \text{si } -\pi < x \le -\frac{\pi}{2} \\ x^2 & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi^2}{8} & \text{si } \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$
- ☐ $\forall x \in]-\pi,\pi]$,
$$Ff(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi^2}{8} & \text{si } x = -\frac{\pi}{2} \\ x^2 & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi^2}{8} & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$

Solution des exercices calculatoires

Exercice 1 (ii) $u(x) = (1 - x^2)e^{-x^2}$

Exercice 2 $u(x) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{12}\cos(2x)$

Exercice 3 $\lambda = -n^2$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $u_{-n^2}(x) = \begin{cases} \frac{A_0}{2} & \text{si } n = 0 \\ A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx) & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$

Exercice 4 $\alpha_r \wedge \alpha_\theta$ est extérieure et $\beta_r \wedge \beta_\theta$ est intérieure.

Exercice 5 $Ff(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi^2}{8} & \text{si } x = -\frac{\pi}{2} \\ x^2 & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi^2}{8} & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$