Remarque.
Certains exercices proviennent du livre *Analyse Avancée pour Ingénieurs*, par B. Dacorogna et C. Tanteri.

Exercice 1 (ex 17.7 p. 271, corrigé p.279)**.**
Trouver une fonction y définie par $y(x)$ telle que l'on ait, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y''(x) + 5y'(x-\pi) - y(x) = \cos x - 3\sin(2x) + 2 \quad \text{et } y(x+2\pi) = y(x)$$

Exercice 2.
Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+4)^2} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t$$

Indication : La transformée de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = xe^{-\omega|x|}$ avec $\omega > 0$ est donnée par

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \frac{4\omega}{i\sqrt{2\pi}} \frac{\alpha}{(\alpha^2+\omega^2)^2}$$

Exercice 3 (Exemple 17.7 p. 269)**.**
Utiliser les proprietés de la transformée de Fourier (produit de convolution) pour trouver une solution $y(x)$ de l'équation intégrale

$$y(x) + 3\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} y(x-t)\,\mathrm{d}t = e^{-|x|} \quad \text{où} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Indication : La transformée de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^{-\omega|x|}}{\omega}$ avec $\omega > 0$ est donnée par

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\alpha^2+\omega^2} \ .$$

Exercice 4 (Ex 17.11 p. 272, corrigé p.279)**.**
Utiliser les proprietés de la transformée de Fourier (dérivée et produit de convolution) pour trouver une solution $y(x)$ de l'équation intégrale

$$3y(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[y''(t) - y(t)\right] f(x-t)\,\mathrm{d}t = g(x)$$

où $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-|x|}$ et $g(x) = xe^{-x^2}$.
Indication : Les transformées de Fourier des fonctions f et g sont respectivemnent données par

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\alpha^2+1} \quad \text{et} \quad \mathfrak{F}(g)(\alpha) = \frac{-i\alpha}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$$

Exercice 5 (ex 15.2 p. 239, corrigé p.240)**.**
On considère la fonction $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-x}\cos x$.

(i) Calculer la transformée de Fourier en cosinus de la fonction f étendue par parité sur $\mathbb{R}$.

(ii) Calculer la transformée de Fourier en sinus de la fonction f étendue par imparité sur $\mathbb{R}$.

Solution des exercices calculatoires

Exercice 1 $-2-\frac{2}{29}\cos(x)-\frac{5}{29}\sin(x)+\frac{6}{25}\cos(2x)+\frac{3}{25}\sin(2x)$

Exercice 2 $\frac{\pi}{16e}$

Exercice 3 $\frac{1}{\sqrt{7}}e^{-\sqrt{7}|x|}$

Exercice 4 xe^{-x^2}

Exercice 5 (i) $\mathcal{F}_c(f)(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2+\alpha^2}{(\alpha^2-2\alpha+2)(\alpha^2+2\alpha+2)}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2+\alpha^2}{4+\alpha^4}$

(ii) $\mathcal{F}_s(f)(\alpha)=-i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha^3}{(\alpha^2-2\alpha+2)(\alpha^2+2\alpha+2)}=-i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha^3}{4+\alpha^4}$