Remarque.
Certains exercices proviennent du livre *Analyse Avancée pour Ingénieurs*, par B. Dacorogna et C. Tanteri.

Remarque.
Dans certains exercices, les formules suivantes peuvent être utiles

$$\boxed{\cos(nx \pm n\pi) = (-1)^n \cos(nx), \quad \sin(nx \pm n\pi) = (-1)^n \sin(nx)}$$

Exercice 1 (ex 17.10 p. 272, corrigé p. 282)**.**
Trouver une solution 2π-périodique $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = f(x)$$

où $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 & \text{si } 0 \leq x < \pi, \\ \dfrac{\pi^2}{2} - \left(x - \frac{3\pi}{2}\right)^2 & \text{si } ; \pi \leq x < 2\pi. \end{cases}$$

Exercice 2 (Exemple 17.6 p. 268)**.**
Trouver une solution 2π-périodique $y(x)$ de l'équation

$$y(x) + 2y(x - \pi) = \cos x + 3\sin(2x) + 4\cos(5x) \qquad \text{pour} \qquad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Indication : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a les formules trigonométriques

$$\cos(nt - n\pi) = (-1)^n \cos(nt), \quad \sin(nt - n\pi) = (-1)^n \sin(nt).$$

Exercice 3 (ex 17.8 p. 271, corrigé p. 280)**.**

(i) Calculer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique et paire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défine par

$$f(x) = \sin(3x) \quad \text{si} \quad x \in [0, \pi].$$

(ii) Trouver une fonction y définie par $y(x)$, 2π-périodique et paire qui vérifie l'équation

$$y(x) - 2y(x - \pi) = \sin(3x) \quad \text{pour} \quad x \in [0, \pi].$$

Exercice 4 (ex 15.1 p. 239, corrigé p. 15.1)**.**
Calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Rappel : Si $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, pour montrer que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = l$, on peut soit montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Re}(f(x)) = \operatorname{Re}(l) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\infty} \operatorname{Im}(g(x)) = \operatorname{Im}(l),$$

ou montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} |g(x) - l| = 0,$$

où, $|\cdot|$ dénote le module complexe.

Exercice 5.
Dessiner le graphe des fonctions suivantes et trouver leur transformée de Fourier :

$$(i)\ \ f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$(ii)\ \ g(x) = \begin{cases} \pi + \frac{\pi}{2}x, & \text{si } -2 \leq x \leq 0, \\ \pi - \frac{\pi}{2}x, & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Quel est le lien entre les fonctions f et g ?

Solution des exercices calculatoires

Exercice 1 $\frac{\pi^2}{4}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{8}{\pi(2k+1)^2((2k+1)^2+1)}\cos((2k+1)x)-\frac{8}{\pi(2k+1)^3((2k+1)^2+1)}\sin((2k+1)x)\right)$

Exercice 2 $-\cos(x)-4\cos(5x)+\sin(2x)$

Exercice 3 (i) $Ff(x)=\frac{2}{3\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-12}{\pi(4k^2-9)}\cos(2kx)$

(ii) $-\frac{2}{3\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{12}{\pi(4k^2-9)}\cos(2kx)$

Exercice 4 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1-i\alpha}{1+\alpha^2}$

Exercice 5 (i) $\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$

(ii) $\sqrt{2\pi}\frac{\sin^2(\alpha}{\alpha^2}$