

Remarque.

Certains exercices proviennent du livre *Analyse Avancée pour Ingénieurs*, par B. Dacorogna et C. Tanteri.

Exercice 1 (ex 14.5 p. 220, corrigé p. 225). (i) Calculer la série de Fourier de la fonction 2π -périodique et impaire qui coïncide avec $x(\pi - x)$ sur $[0, \pi]$.

(ii) En utilisant la question (i) et l'identité de Parseval, déduire la somme de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^6}.$$

Exercice 2 (ex 14.6 p. 220, corrigé p. 226).

A l'aide de l'identité de Parseval, montrer que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 x \, dx = \frac{3}{4}\pi.$$

Remarque : Le but de cet exercice n'est pas de calculer une primitive de $\cos^4(x)$ (qu'on sait faire avec les formules d'Euler) mais plutôt de calculer une série de Fourier à l'aide des formules d'Euler.

Exercice 3 (ex 14.7 p. 220, corrigé p. 226). (i) Calculer la série de Fourier de la fonction 2π -périodique définie par

$$f(x) = |x| \quad \text{si } x \in [-\pi, \pi[.$$

(ii) En déduire les sommes des séries

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

Exercice 4.

Soit $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x$.

(i) Calculer $F_c f$ et $F_s f$, les séries de Fourier en cosinus et en sinus de la fonction f .

(ii) Comparer les valeurs de $F_c f$, $F_s f$, et f sur $[0, \pi]$.

(iii) En déduire la valeur des deux sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Exercice 5.

Soit f la fonction 2π -périodique définie dans l'exercice 1 (14.5). Posons

$$F(x) = \int_0^x f(y) \, dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) La fonction F est-elle 2π -périodique ? Justifier votre réponse.

(ii) En utilisant la série de Fourier de f , trouver la série de Fourier de F . On donnera explicitement le terme constant de cette série.

Solution des exercices calculatoires

Exercice 1 (i) $Ff(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin((2k-1)x)$

(ii) $\frac{\pi^6}{960}$

Exercice 3 (i) $Ff(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k+1)^2} \cos((2k+1)x)$

(ii) $\frac{\pi^4}{96}, \frac{\pi^4}{90}$

Exercice 4 (i) $F_c f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k+1)^2} \cos((2k+1)x), F_s f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$

(iii) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi^2}{8}$