EPFL – Automne 2025	D. Strütt
Analyse III – CGC GC SIE	**Exercices**
Série 2	18 septembre 2025

Remarque.
Certains exercices proviennent du livre *Analyse Avancée pour Ingénieurs*, par B. Dacorogna et C. Tanteri.

Exercice 1 (ex 1.1, p. 7, corrigé p. 8)**.**
Soit

$$F(x,y,z) = \Big(y^2 \sin(xz), e^y \cos(x^2+z), \log(2+\cos(xy))\Big) = (F_1, F_2, F_3).$$

Calculer :

(i) $\operatorname{grad} F_1$, $\operatorname{grad} F_2$, $\operatorname{grad} F_3$

(ii) $\operatorname{div} F$

(iii) $\operatorname{rot} F$.

Exercice 2 (ex 1.2, p. 7, corrigé p. 8)**.**
Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est $C^1(\mathbb{R}^3)$ et $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est $C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$, alors parmi les expressions suivantes lesquelles ont un sens ?

(i) ∇f	(iv) $\operatorname{div} f$	(vii) $\operatorname{rot} f$
(ii) $f \cdot \nabla f$	(v) $\operatorname{div}(f \cdot F)$	($viii$) $f \cdot \operatorname{rot} F$
(iii) $\langle F, \nabla f\rangle$	(vi) $\operatorname{rot}(f \cdot F)$	(ix) $\operatorname{rot}\operatorname{div} F$

Exercice 3 (exemple 1.3, p. 6)**.**
Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$, et $r \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $r(x) = \|x - a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2}$. Soit f le champ scalaire défini par $f(x) = 1/r(x)$. Calculer Δf.

Exercice 4 (ex 1.6&1.7, p. 8, corrigé p. 11)**.**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert. Montrer que :

(i) Si $f \in C^1(\Omega)$ et $g \in C^2(\Omega)$, alors :

$$\operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) = f\Delta g + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g\rangle$$

(ii) Si $f, g \in C^1(\Omega)$, alors :

$$\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$$

(iii) Si $f \in C^1(\Omega)$ et $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ alors :

$$\operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div} F + \langle F, \operatorname{grad} f\rangle$$

(iv) Si $F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, alors :

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} F = -\Delta F + \operatorname{grad}\operatorname{div} F,$$

où pour $F = (F_1, F_2, F_3)$ on note $\Delta F = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3)$.

(v) Si $f \in C^1(\Omega)$ et $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, alors :

$$\operatorname{rot}(fF) = \operatorname{grad} f \wedge F + f \operatorname{rot} F$$

Exercice 5 (ex 1.4, p. 7, corrigé p. 9)**.**
Soit $f \in C^2(\Omega)$, où

$$\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x, y > 0\Big\}.$$

(i) Montrer que, si

$$g(r,\theta) := f(r\cos\theta, r\sin\theta) = f(x,y),$$

alors

$$\frac{\partial^2 g(r,\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g(r,\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g(r,\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \Delta f(x,y).$$

(ii) Calculer Δf pour

$$f(x,y) := \sqrt{x^2+y^2} + \left(\arctan\frac{y}{x}\right)^2.$$

Solution des exercices calculatoires

Exercice 1 (i)

$$\begin{aligned}\nabla F_1 =&(y^2 z\cos(xz), 2y\sin(xz), xy^2\cos(xz))\\ \nabla F_2 =&(-2xe^y\sin(x^2+z), e^y\cos(x^2+z), -e^y\sin(x^2+z))\\ \nabla F_3 =& \left(-\frac{y\sin(xy)}{2+\cos(xy)}, -\frac{x\sin(xy)}{2+\cos(xy)}, 0\right)\end{aligned}$$

(ii) $\operatorname{div} F = y^2 z\cos(xz) + e^y\cos(x^2+z)$

(iii)

$$\operatorname{rot} F = \left(-\frac{x\sin(xy)}{2+\cos(xy)} + e^y\sin(x^2+z), xy^2\cos(xz) + \frac{y\sin(xy)}{2+\cos(xy)}, -2(xe^y\sin(x^2+z) + y\sin(xz))\right)$$

Exercice 3 $\frac{3-n}{r^3}$

Exercice 5 (ii) $\frac{2+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$