Analyse III pour CGC, GC et SIE : Organisation du cours

David Strütt

EPFL MATH-203(b) Analyse III

11 septembre 2025

Enseignant : David Strütt

Chargé de cours depuis 2018

Ancien étudiant de l'EPFL

Assistant Principal : Philipp Weder

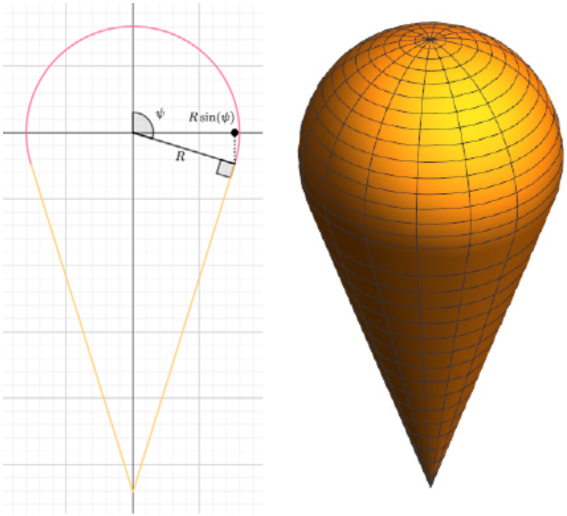
Doctorant en analyse numérique.

Plus 6 assistant · es étudiant · es.

Contenu

Analyse Vectorielle :

- Opérateurs différentiels de la physique.
- Champs qui dérivent d'un potentiel.
- Intégrales multiples, curvilignes et de surface. Théorèmes de Green, divergence et Stokes.

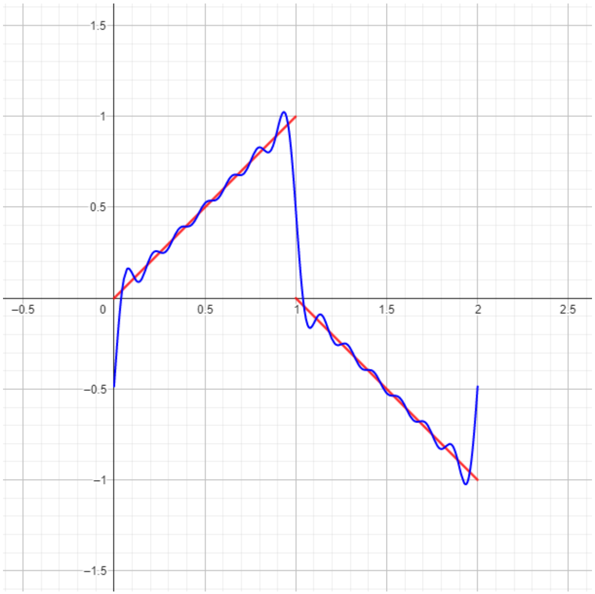


Calculer le volume de glace dans un cornet standard

Contenu

Analyse de Fourier :

- Séries de Fourier.
- Transformée de Fourier.
- Applications aux équations différentielles ordinaires et intégrales.



Contenu

Le cours ressemblera à Analyse II :

- Problème type -> méthode pour le résoudre, calcul, calcul, calcul...
- Aucune démonstration formelle ne sera faite dans le cours et il n'y aura aucune démonstration à redonner dans l'examen.

Ressources

Les ressources d'apprentissages auxquelles vous avez accès sont :

- Les cours ex cathedra les jeudis de 13h15 à 15h00 en CE 2.
- Les séries d'exercices publiées sur moodle (6 jours avant la séance correspondante, la série est publiée, le lendemain de la séance, un corrigé est publié.)

Ressources

Les ressources d'apprentissages auxquelles vous avez accès sont :

- Le livre *Analyse avancée pour ingénieurs* par B. Dacorogna et C. Tanteri, les notes de cours de l'automne 2024, les rediffusions des cours de l'automne 2024, les vidéos du cours d'automne 2020 (COVID), des exercices supplémentaires, d'anciens examens avec leurs corrigés.
- Les séances d'exercices avec les assistant · es les jeudis de 15h15 à 17h.
- Le forum Ed Discussions surveillé par des assistant · es les mardis soirs à partir de la semaine 3.

Ressources

À propos du livre *analyse avancée pour ingénieurs* :

- Référence du cours.
- Une version consultable en ligne (et téléchargeable) est disponible sur moodle.
- Il devrait être possible de suivre le cours **sans** accès au livre.

À propos du forum Ed-Discussion :

- Surveillé à partir de la semaine 3
- Merci d'utiliser des titres descriptifs (Série XX, Ex XX, ...)
- J'espère pouvoir le maintenir pendant les révisions

Examen

L'examen aura une partie QCM et une partie ouverte. Les questions ressembleront à ce qu'il y a dans les séries d'exercice : Une majorité de question type et quelques questions de compréhension.

Dans l'examen, il y aura les tables de transformée de Fourier (voir § 15.5, page 245 du livre *Analyse avancée pour ingénieurs* par Dacorogna Tanteri)

Vous pouvez amener un formulaire d'une page A4 recto verso.

Vous n'avez pas le droit d'amener une calculatrice, ou toute autre machine électronique.

Prérequis

Formules d'Euler : $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

Calcul différentiel et intégral Analyse I : dérivées et primitives standard, intégration par parties, formule de changement de variables.

Calcul différentiel et intégral Analyse II : Formule de dérivation d'un produit de composition dans $\mathbb{R}^n$, paramétrisation de domaines en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques en vue d'intégrer dessus.

Questions ?

Notations

MATH-203(b) - Analyse III pour CGC, GC, SIE

autmone 2025

- On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ et on notera parfois $\mathbb{N}_{\geq k} = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \geq k\}$.
- On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.
- On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \ : \ a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$
- On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
- On note $\mathbb{C} = \{x + iy \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des nombres complexes.
- Pour $n \geq 2$, on note $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{n \text{ fois}} = \{(x_1, ..., x_n) \ : \ \forall 1 \leq i \leq n, x_i \in \mathbb{R}\}$.

  Si $n = 2$, on écrit $(x_1, x_2) = (x, y)$ et si $n = 3$, on écrit $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$, c'est-à-dire, x n'est pas le vecteur, mais sa première composante.
- Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, une fonction de Ω à valeur dans $\mathbb{R}$, $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ est appelée un champ scalaire. Ω est le domaine de f, $\mathbb{R}$ son codomaine. L'image de f notée $\mathrm{Im}\,(f)$ est l'ensemble $\mathrm{Im}\,(f) = \{y \in \mathbb{R} \ : \ \exists x \in \Omega$ tel que $f(x) = y\} = f(\Omega)$.

  Si Ω est ouvert, on écrit $f \in C^0(\Omega)$ si f est continue sur Ω, c'est-à-dire, f est continue en chaque point de Ω, et pour $k \geq 1$, on écrit $f \in C^k(\Omega)$ si toutes les dérivées d'ordre plus petit ou àgal à k existent et sont continues.
- Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, une fonction de Ω à valeur dans $\mathbb{R}^n$, $F \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ est appelé un champ vectoriel. On écrit alors $F = (F_1, ..., F_n)$ avec $F_i \colon \Omega \to \mathbb{R}$. Ω est le domaine de F, $\mathbb{R}^n$ son le codomaine. L'image de F noté $\mathrm{Im}\,(F)$ est l'ensemble $\mathrm{Im}\,(f) = \{y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \exists x = (x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $F(x) = y\} = F(\Omega)$.

  Si Ω est ouvert, et $k \in \mathbb{N}$, on écrit $F \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ si $F_i \in C^k(\Omega)$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
- Pour $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x|$ dénote la norme euclidienne standard : $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

Ligne ou colonne ?

Partie I : Analyse Vectorielle

Chapitre 1 Les opérateurs différentiels de la physique.

§ 1.1 Le gradient

Définition 1.1 Le gradient

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f \in C^1(\Omega)$, $f = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$

Le gradient de f noté $\operatorname{grad} f$, ∇f, Df est le champ vectoriel $\nabla f : \Omega \to \mathbb{R}^n$

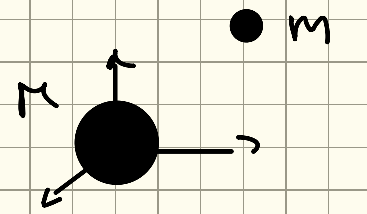
$$x \longmapsto \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

Remarque 1.2

On écrit $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ qu'on appelle nabla pour que ∇f se comporte comme la "multiplication par scalaire" du "vecteur" ∇ et du scalaire f; on interprète $\frac{\partial}{\partial x_i} \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$

Exemple 1.3

$$f(x,y,z) = \frac{G\, m . M}{r(x,y,z)} \quad \text{où} \quad r(x,y,z) = \|(x,y,z)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$



On a $$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot 2x = \frac{x}{r(x,y,z)}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r(x,y,z)}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r(x,y,z)}$$

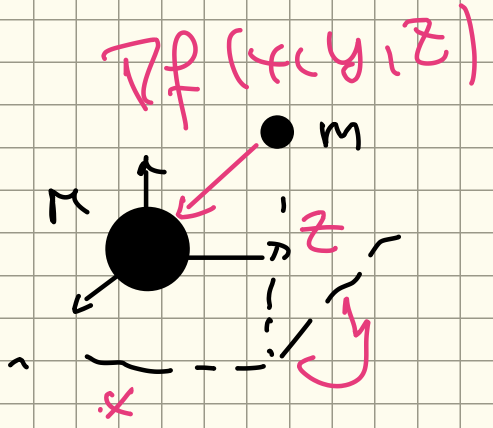
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = GmM \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{r(x,y,z)}\right] = GmM \frac{-1}{r(x,y,z)^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}(x,y,z)$$

$$= GmM \frac{-x}{r(x,y,z)^3} = -\frac{GmM}{r(x,y,z)^3} \cdot x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{GmM}{r(x,y,z)^3}\cdot y, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{GmM}{r(x,y,z)^3}\cdot z$$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(-\frac{GmM}{r^3}\cdot x, -\frac{GmM}{r^3}\cdot y, -\frac{GmM}{r^3} z\right)$$

$$= -\frac{GmM}{r(x,y,z)^3}(x,y,z)$$



Interprétation géométrique: ∇f pointe toujours dans la direction où f grandit le plus rapidement.

si $v \in \mathbb{R}^4$ tq $|v| = 1$, $u = \dfrac{\nabla f(x_0,y_0,z_0)}{|\nabla f(x_0,y_0,z_0)|}$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0,z_0) \leq \frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0,z_0)$$

$\nabla f \perp f^{-1}(\{c\})$ $\quad c \in \mathbb{R}$.

§1.2 La divergence

Définition 1.4 : divergence

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$. La <u>divergence</u> de F, notée $\operatorname{div} F$, $\nabla \bullet F$, $\langle \nabla ; F \rangle$ est le champ scalaire

$$\operatorname{div} F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \operatorname{div} F(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)$$
$$= \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x) + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x).$$

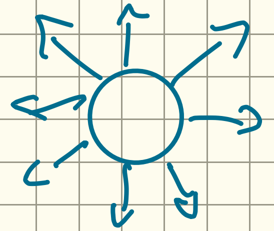
Example 1.5

$$F(x,y) = (-x^2+2x,\ -y^2+2y)$$

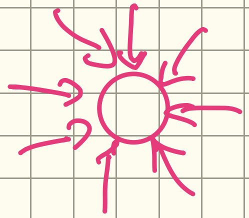
$$\operatorname{div} F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[-x^2+2x\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[-y^2+2y\right] = -2x+2-2y+2$$

$$= -2(x+y) + 4$$

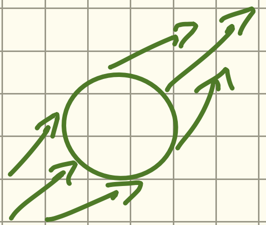
$$\operatorname{div} F(0,0) = 4$$



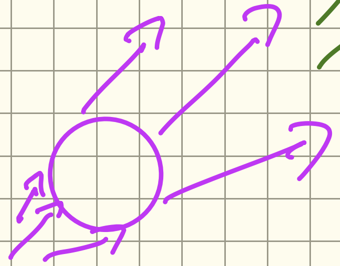
$$\operatorname{div} F(2,2) = -4$$

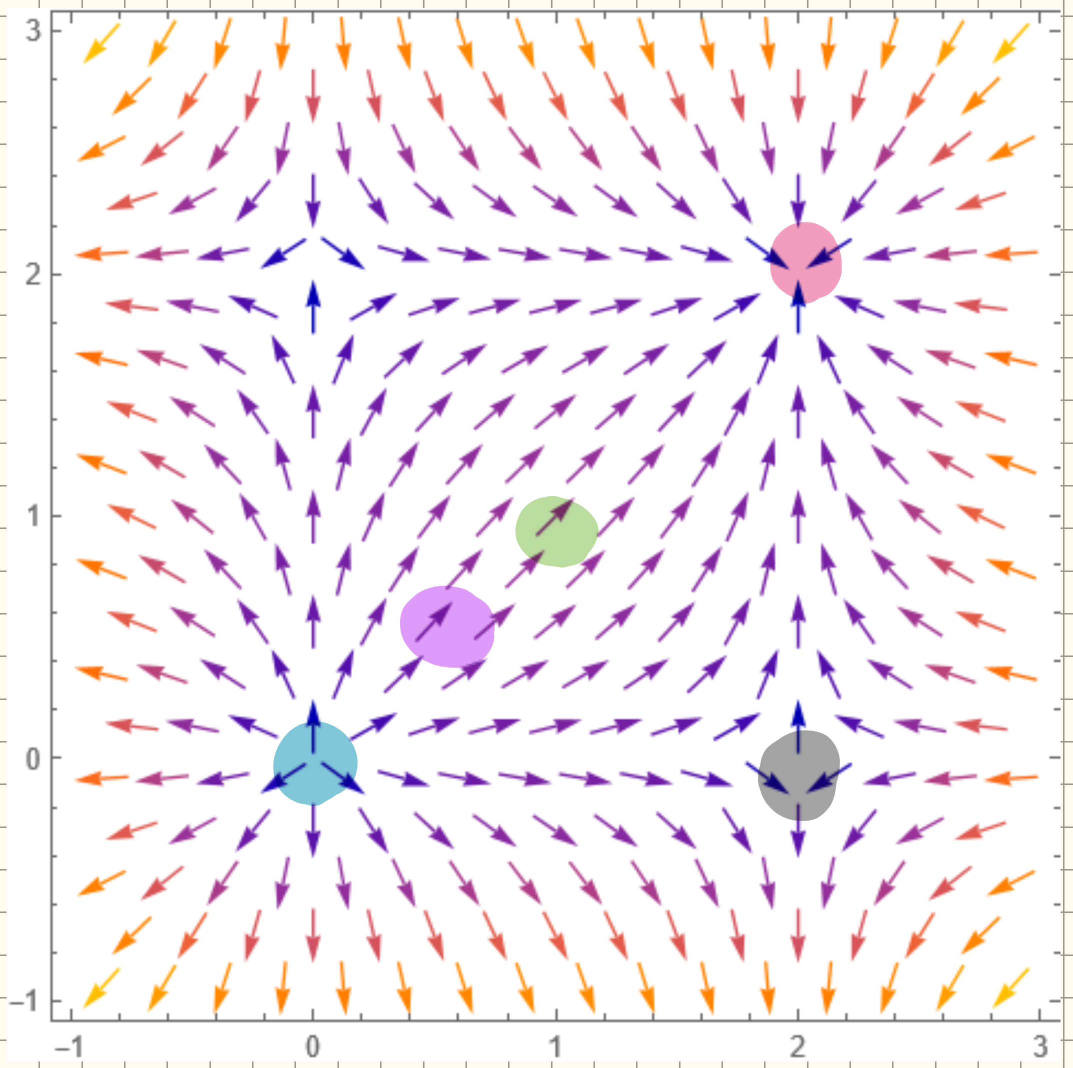


$$\operatorname{div} F(1,1) = 0$$

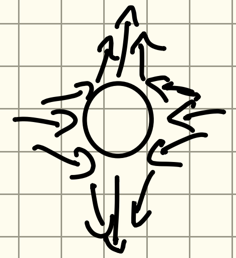


$$\operatorname{div} F\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = 2$$





$\operatorname{div} F(2,0) = 0$



<u>Interprétation géométrique</u> de la divergence : La divergence de F nous informe sur à quel point F se comporte comme une source ($\operatorname{div} F \geq 0$) ou un puits ($\operatorname{div} F \leq 0$)

§<u>1.3</u> Le rotationnel

<u>Définition 1.6</u> rotationnel

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Alors, le rotationnel de F noté $\operatorname{rot} F$ ou $(\nabla \times F)$ ($\to n=3$) ou $\nabla \wedge F$ (curl F en anglais) est

si $n=2$ le champ scalaire $\operatorname{rot} F : \Omega \to \mathbb{R}$ défini par

$$\operatorname{rot} F(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)$$

Si $n=3$ le champ vectoriel $\operatorname{rot} F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Dans ce cas, on peut voir rot F comme le produit vectoriel

$$\nabla \times F = \left| \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{matrix} \right| \begin{matrix} e_1 & e_2 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F_1 & F_2 \end{matrix} \qquad \oplus \quad \ominus$$

$$e_1 \frac{\partial}{\partial y} F_3 + e_2 \frac{\partial}{\partial z} F_1 + e_3 \frac{\partial}{\partial x} F_2 - e_3 \frac{\partial}{\partial y} F_1 - e_1 \frac{\partial}{\partial z} F_2 - e_2 \frac{\partial}{\partial x} F_3$$

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} , \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} , \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

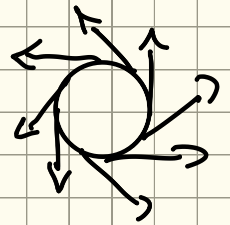
si $n \geq 4$ des formules existent, mais on ne les voit pas dans ce cours.

Exemples 1.7

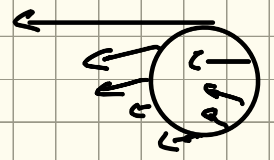
(i) $F(x,y) = (-y, x)$, $\operatorname{rot} F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}[x] - \frac{\partial}{\partial y}[-y]$

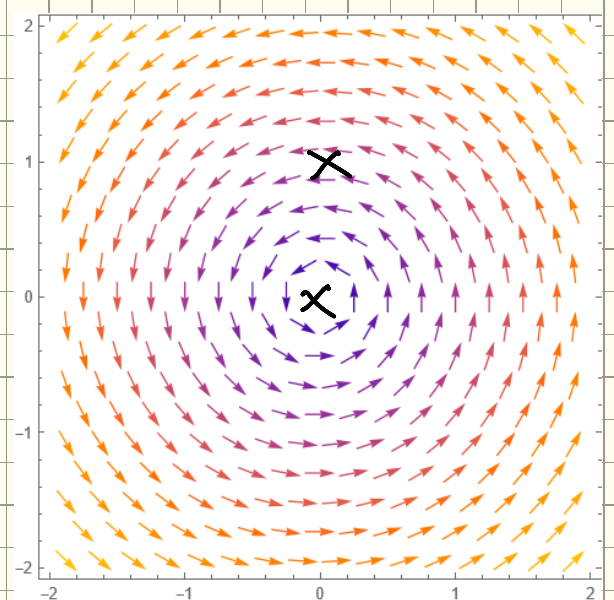
$= 2$

en $(0,0)$:



en $(0,1)$





Interprétation géométrique du rotationnel

rot F nous indique à quel point le champ vectoriel tourne

rot F > 0 → rotation dans le sens trigo

rot F < 0 → rotation dans le sens horaire.

rot F = 0 → pas de rotation.

(iii) $F(x,y,z) = (x^2 - e^y, \sin(z), y^2+z)$

$$\text{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2-e^y & \sin(z) & y^2+z \end{vmatrix} = e_1 \frac{\partial}{\partial y}[y^2+z] + e_2 \frac{\partial}{\partial z}[x^2-e^y] + e_3 \frac{\partial}{\partial x}[\sin(z)] - e_3 \frac{\partial}{\partial y}[x^2-e^y]$$

$$- e_1 \frac{\partial}{\partial z}[\sin(z)] - e_2 \frac{\partial}{\partial x}[y^2+z]$$

$$= \left(2y - \cos(z),\ 0 - 0,\ 0 - (-e^y)\right) = \left(2y - \cos(z),\ 0,\ e^y\right)$$

rotation autour de l'axe x, i.e. dans le plan y, z

rotation autour de l'axe y, i.e. dans le plan x, z

rotation autour de l'axe z, i.e. dans le plan x, y