Infos de fin du semestre :

◇ RàQ en présentiel le jeudi 8 janvier à 14h15 en CM1 105

◇ Support sur le forum pendant les révisions : sera minime : Assistant principal + enseignant

◇ Fin du cours : On devrait avoir fini le contenu du cours aujourd'hui. Jeudi prochain : on regardera certaines questions de l'examen 2023-2024. (L'examen de 2024-2025 est réservé pour un test en conditions d'examen) Notez que les corrigés des anciens examens sont justifiés !

Infos sur l'examen

◇ Format comme Analyse I&II à 4 exceptions près :

- Temps : 2h
- Points variables
- Formulaire 1 page A4 recto/verso
- Pas de Vrai/Faux

◇ Contenu : Pas de démos ! Que des exercices type (Anciens exams sont une bonne approx)

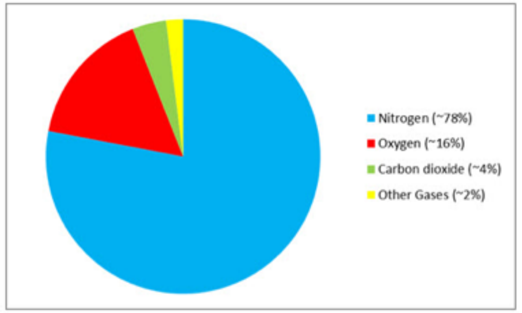
◇ Rough timeline

Pas de sortie définitive

Ramassage + comptage des copies

ouverture des portes

9h05 / 9h10 — 9h15 — 10h15 — 11h00 — 11h15 — 11h15 + ε



$f \in C^1(\mathbb{R})$, $f' \in C^1_{\text{morc}}$, 2π-périodique

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left\{ a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right\}$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\{ k b_k \cos(kx) - k a_k \sin(kx) \right\}$$

$f \in C^1$, $\int_{\mathbb{R}} |f| < +\infty$, $\int_{\mathbb{R}} |f'| < +\infty$

$$\mathcal{F}[f'] = i\alpha \hat{f}(\alpha)$$

$g, h \in C^0_{\text{morc}}$, $\int_{\mathbb{R}} |g| < +\infty$ $\int_{\mathbb{R}} |h| < +\infty$

$$\mathcal{F}[g * h] = \sqrt{2\pi}\, \hat{g} \cdot \hat{f}$$

où $g * h(x) =$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) h(x-t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t) h(t)\, dt$$

Chapitre 6 : Applications de l'analyse de Fourier

§ 6.1 : Applications des séries de Fourier

Exemples 6.1 :

(i) Déjà vu, voir cours semaine 11

(ii) Soit $\alpha \neq \pm 1$, $f \in C^1(\mathbb{R})$, 2π-périodique

Trouver $u : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ tq

$$\begin{cases} u(t) + \alpha u(t-\pi) = f(t) & \forall t \in]0, 2\pi[\\ u(0) = u(2\pi) \end{cases}$$

Ansatz : On cherche une solution sous la forme d'une série de Fourier :

$$u(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ A_n \cos(nt) + B_n \sin(n \cdot t) \right\}$$

$$u(t-\pi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ A_n \underbrace{\cos(n(t-\pi))}_{\underbrace{\cos(nt - n\pi)}_{= (-1)^n \cos(nt)}} + B_n \underbrace{\sin(n(t-\pi))}_{\underbrace{\sin(nt-n\pi)}_{(-1)^n \sin(n \cdot t)}} \right\}$$

$$= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ A_n (-1)^n \cos(nt) + B_n (-1)^n \sin(nt) \right\}$$

$$f(t) = u(t) + \alpha u(t-\pi)$$

$$= (1+\alpha)\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ A_n \left(1+\alpha(-1)^n\right)\cos(nt) + B_n\left(1+\alpha(-1)^n\right)\sin(nt) \right\}$$

$$\text{Si } f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \right\}$$

$$\Rightarrow \quad (1+\alpha)\frac{A_0}{2} = \frac{a_0}{2}$$

$$\begin{cases} A_n\left(1+\alpha(-1)^n\right) = a_n \\ B_n\left(1+\alpha(-1)^n\right) = b_n \end{cases} \quad n \geq 1 \quad \Rightarrow \quad A_n = \frac{a_n}{1+\alpha(-1)^n}, \quad B_n = \frac{b_n}{1+\alpha(-1)^n}$$

Si par exemple $f(t) = \cos t + 3\sin(2t) + 4\cos(5t)$

$a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $a_2 = 0$, $b_2 = 3$, $a_3 = b_3 = a_4 = b_4 = 0$

$a_5 = 4$, $b_5 = 0$ $\quad a_n = b_n = 0 \quad \forall n \geq 6$

$$u(t) = \frac{\cos(t)}{1-\alpha} + \frac{3}{1+\alpha}\sin(2t) + \frac{4}{1-\alpha}\cos(5t)$$

Si $\alpha = \pm 1$? $\boxed{\alpha = +1}$

Le système devient
$$\begin{cases} A_n(1+(-1)^n) = a_n \\ B_n(1+(-1)^n) = b_n \end{cases}$$

si n pair
$$\begin{cases} 2A_n = a_n \\ 2B_n = b_n \end{cases}$$

si n impair
$$\begin{cases} 0 = a_n \\ 0 = b_n \end{cases}$$

2 choses se produisent :

1) On obtient une condition nécessaire sur f :
$\forall n$ impair $a_n = b_n = 0$ (sans quoi impossible de trouver une sol.)

2) On récupère une infinité de solutions,
$\forall n$ impair, A_n, B_n sont quelconques

§6.2 : Applications de la transformée de Fourier

Exemple 6.2

(i) Trouver $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution de

$$u''(x) + 2u(x) = x^2 e^{-x^2}$$

$\tilde{\mathcal{F}}$

$$\tilde{\mathcal{F}}\left[x^2 e^{-x^2}\right](\alpha) = \tilde{\mathcal{F}}\left[u''(x) + 2u(x)\right]$$ Prop. 5.7 (ii)

$$\tilde{\mathcal{F}}[x f(x)] = i \frac{d}{d\alpha}\left[\tilde{f}\right]$$

$$= \tilde{\mathcal{F}}[u''](\alpha) + 2\tilde{\mathcal{F}}[u](\alpha)$$

Prop 6.7

$$= (i\alpha)^2 \hat{u} + 2\hat{u} = (2-\alpha^2)\hat{u}$$

(i) $2x$

$$\tilde{\mathcal{F}}\left[x^2 e^{-x^2}\right] = \tilde{\mathcal{F}}\left[x \cdot \underbrace{x e^{-x^2}}\right] = i \frac{d}{d\alpha}\left[\tilde{\mathcal{F}}\left[x e^{-x^2}\right](\alpha)\right]$$

Tables ligne 9

$\tilde{\mathcal{F}}$

$$x e^{-\omega^2 x^2}$$

$$\frac{-i\alpha}{2\sqrt{2}|\omega|^3} e^{-\frac{\alpha^2}{4\omega^2}}$$

$$= i \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{-i\alpha}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}}\right]$$

$$= i\left(\frac{-i}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{\alpha^2}{4}} - \frac{i\alpha}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{\alpha^2}{4}}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{\alpha^2}{4}}\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow (2-\alpha^2)\,\hat{u} = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{\alpha^2}{4}}\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{u} = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{\alpha^2}{4}}\underbrace{\frac{1-\frac{\alpha^2}{2}}{2-\alpha^2}}_{=\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\alpha) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\alpha) = \frac{1}{4}\mathcal{F}\left[e^{-x^2}\right] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{4}e^{-x^2}\right]$$

table ligne 8 $f(x) = e^{-\omega^2x^2}$

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}\,|\omega|}e^{-\frac{\alpha^2}{4\omega^2}}$$

$\Rightarrow u(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{u}](x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[\frac{1}{4}e^{-x^2}\right]\right] = \frac{1}{4}e^{-x^2}$

(ii) Trouver $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de

$$9u(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} 8u(t)e^{-|x-t|}\,dt = e^{-|x|}$$

Si $f(x) = e^{-|x|}$, cette équation s'écrit

$$9u + 8\,u * f = f$$

$\left(\text{Ligne 7} \quad \hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\alpha^2}\right)$

$$9\hat{u} + 8\,\mathcal{F}[u*f] = \hat{f}$$

Prop 5.12 : $\mathcal{F}[u*f] = \sqrt{2\pi}\,\hat{u}\cdot\hat{f}$

$$9\hat{u} + \sqrt{2\pi}\cdot 8\cdot\hat{u}\cdot\hat{f} = \hat{f}$$

$$\hat{u}\left(9 + 8\sqrt{2\pi}\,\hat{f}\right) = \hat{f}$$

$$\hat{u}\left(9 + 8\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\alpha^2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\alpha^2}$$

$$\hat{u}\left(9 + \frac{16}{1+\alpha^2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\alpha^2}$$

$$\hat{u}\,\frac{25 + 9\alpha^2}{1+\alpha^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\alpha^2}$$

$$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\omega^2+\alpha^2}$$

$$\hat{u}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{25+9\alpha^2}$$

$$= \frac{1}{9}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\frac{25}{9}+\alpha^2} = \frac{1}{9}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)^2+\alpha^2} = \frac{1}{9}\mathcal{F}\left[\frac{e^{-\frac{5}{3}|x|}}{\frac{5}{3}}\right]$$

$$\Rightarrow u(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{u}(\alpha)\right] = \frac{1}{9}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\left[\frac{e^{-\frac{5}{3}|x|}}{\frac{5}{3}}\right] = \frac{1}{9}\,\frac{e^{-\frac{5}{3}|x|}}{\frac{5}{3}}$$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{1}{15} e^{-\frac{5}{3}|x|}$$

§ 6.3 : Sur l'incompatibilité entre § 6.1 & § 6.2

Il n'existe pas de problème intéressant où les 2 méthodes s'applique ;

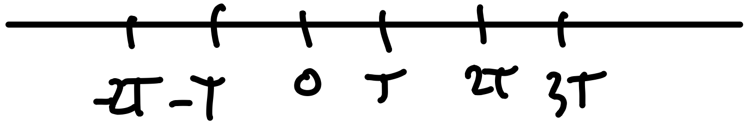
Si u est solution d'un problème où les 2 méthodes s'appliquent :

§ 6.1 $\Rightarrow$ u est T-périodique.

§ 6.2 $\Rightarrow$ $\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)| dx < +\infty$

Or,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|\,dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} |u(x)|\,dx$$



$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^T |u(x)|\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } \int_0^T |u(x)|\,dx = 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^T |u(x)|\,dx = 0 \Rightarrow \forall x \in [0,T],\ |u(x)| = 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0,T],\ u(x) = 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = 0$$

Comment décider entre §6.1 (séries de Fourier) §6.2 (transformée de Fourier) ?

§6.1 Série de Fourier

"périodique"

$u : [a,b] \to \mathbb{R}$

$u(a) = u(b)$

§6.2 Trafo de Fourier

$u * f$

$u, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

pas périodiques