$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ tq $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx<+\infty$

$$\hat{f}(\alpha)=\mathcal{F}[f](\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\alpha x}\,dx$$

$\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ tq $\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(\alpha)|\,d\alpha$ , $\mathcal{F}^{-1}[\varphi](x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)e^{i\alpha x}\,d\alpha$

<u>Thm:</u> Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est tq $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx<+\infty$ & $\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(\alpha)|\,d\alpha<+\infty$,

Alors, $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[f]=f$

## <u>Exemples 5.4</u>

(ii) $f(x)=e^{-|x|}$, $\hat{f}(\alpha)=?$

$$\hat{f}(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x|}e^{-i\alpha x}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{0} e^{x} e^{-i\alpha x} dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x} e^{-i\alpha x} dx \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{0} e^{x(1-i\alpha)} + \int_{0}^{+\infty} e^{-x(1+i\alpha)} dx \right.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \left[ \frac{1}{1-i\alpha} e^{x(1-i\alpha)} \right]_{-\infty}^{0} + \left[ \frac{-1}{1+i\alpha} e^{-x(1+i\alpha)} \right]_{0}^{+\infty} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{1-i\alpha} - \lim_{x \to -\infty} \left( \frac{1}{1-i\alpha} e^{x(1-i\alpha)} \right) + \lim_{x \to +\infty} \left( \frac{-1}{1+i\alpha} e^{-x(1+i\alpha)} \right) + \frac{1}{1+i\alpha} \right)$$

Remarquons que $\lim_{x \to -\infty} e^{x(1-i\alpha)} = \lim_{x \to -\infty} \overbrace{e^{x}}^{\to 0} \big(\cos \underbrace{(\alpha x) - i \sin(\alpha x)}_{\text{borné}}\big)$

$$= 0$$

Idem, $\lim_{x\to+\infty} e^{-x(1+i\alpha)} = 0.$

$$\Rightarrow \hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1-i\alpha} + \frac{1}{1+i\alpha}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1-i\alpha+1+i\alpha}{1+\alpha^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\alpha^2}$$

(Voir tables §15.5 7) ($\omega=1$))

Remarquons que $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)|\,d\alpha = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+\alpha^2}\,d\alpha$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\arctan(\alpha)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\pi = \sqrt{2\pi} < +\infty$$

thm 5.2 $\Rightarrow$ $e^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\alpha)\,e^{i\alpha x}\,d\alpha$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\alpha^2}\left(\cos(\alpha x) + i\sin(\alpha x)\right)d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1+\alpha^2}\,d\alpha + i\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{1+\alpha^2}\,d\alpha$$

$\Rightarrow$ en identifiant partie réelle & partie imaginaire,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{1+\alpha^2}\,d\alpha = 0 \quad \& \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1+\alpha^2}\,d\alpha = \pi e^{-|x|}$$

Là où Dirichlet nous permettait de calculer des séries la formule d'inversion nous permet de calculer des intégrales.

<u>Remarque 5.4</u> Calcul de TraFo

En général, calculer une transformée de Fourier, c'est dur! On a besoin de l'analyse complexe plus précisément le théorème des Résidus (Analyse IV)

On utilisera les tables pour ce cours.

## §5.2 Propriétés des transformées de Fourier

<u>Proposition</u> 5.5 : Continuité, linéarité, composition avec fonctions affines, décalage.

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues par morceaux tq $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$ & $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\,dx < +\infty$. Alors,

(i) $\hat{f}$ est continue.

(ii) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $\quad \tilde{\mathcal{F}}[a \cdot f + bg] = a\,\tilde{\mathcal{F}}[f] + b \cdot \tilde{\mathcal{F}}[g]$

(iii) Si $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(ax+b)$,

$$\hat{g}(\alpha) = \frac{e^{i\frac{b}{a}\cdot\alpha}}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\alpha}{a}\right)$$

(iv) Si $g(x) = e^{-ibx} f(x)$, $\hat{g}(\alpha) = \hat{f}(\alpha+b)$

Idée de la preuve : (i) $\alpha \mapsto e^{-i\alpha x}$ est continue, (ii) lin. de $\int$

(iii) $$\hat{g}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\overbrace{ax+b}^{y}) e^{-i\alpha x} dx$$

$ax+b = y$ $\Rightarrow$ $x = \frac{y-b}{a}$ $dx = \frac{1}{|a|} dy$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\alpha \frac{y-b}{a}} \cdot \frac{1}{|a|} dy$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-iy\frac{\alpha}{a}} dy}_{\hat{f}\left(\frac{\alpha}{a}\right)} \frac{1}{|a|} e^{i\alpha\frac{b}{a}} = \frac{e^{i\alpha\frac{b}{a}}}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\alpha}{a}\right)$$

(iv) $$\hat{g}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ibx} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i(\alpha+b)x} dx = \hat{f}(\alpha+b)$$

<u>Théorème 5.6</u> Identité de Plancherel

Soit $f$ continue par morceaux, tq $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$ & $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty$. Alors,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)|^2 \, d\alpha$$

**Proposition 5.7** $\mathcal{F}[f']$, $\left(\mathcal{F}[f]\right)'$

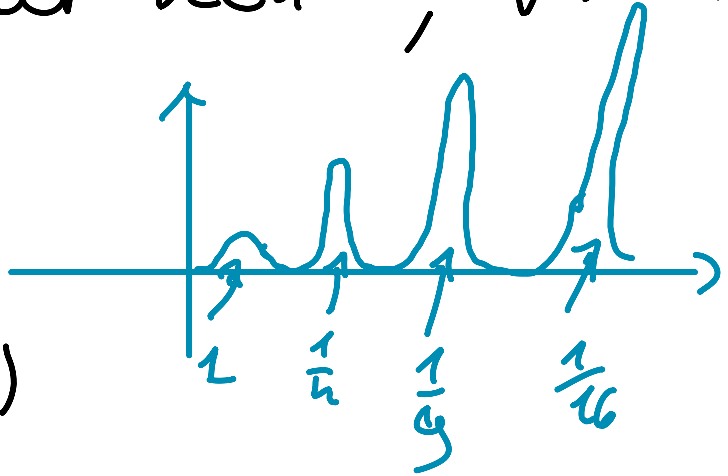
(i) Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ tq $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx < +\infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)| \, dx < +\infty$

Alors, $\mathcal{F}[f'](\alpha) = i\alpha \, \mathcal{F}[f](\alpha)$

Plus généralement, si de plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall \, 1 \leq k \leq n$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(k)}(x)| \, dx < +\infty,$$

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](\alpha) = (i\alpha)^n \, \mathcal{F}[f](\alpha)$$




(ii) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et $h(x) = x \cdot f(x)$

tq $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)|dx < +\infty$.

Alors, $\hat{f}$ est dérivable et

$$\hat{f}'(\alpha) = -i\hat{h}(\alpha)$$

Plus généralement par récurrence, si $h_k(x) = x^k f(x)$ et que $\forall 1 \leq k \leq n$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |h_k(x)|dx < +\infty$, alors,

$$\frac{d^n \hat{f}}{d\alpha^n}(\alpha) = (-i)^n \tilde{\mathcal{F}}[h_n](\alpha)$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} |\alpha \cdot \hat{f}(\alpha)|\, d\alpha \Rightarrow f$ dérivable

Idée de la preuve :

(i) IPP : $\tilde{\mathcal{F}}[f'](\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\alpha x} dx$

$$\overset{IPP}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \underbrace{\left[ f(x) e^{-i\alpha x} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0 \text{ car } \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, (-i\alpha) e^{-i\alpha x} \, dx \right)$$

$$= i\alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx = i\alpha \hat{f}(\alpha)$$

(ii) $$\frac{d}{d\alpha}\left[\hat{f}(\alpha)\right] = \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, e^{-i\alpha x} dx\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \frac{d}{d\alpha}\left[e^{-i\alpha x}\right] dx$$

$$= -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x f(x)}_{h(x)} e^{-i\alpha x} dx = -i \, \hat{h}(\alpha)$$

# Exemple 5.7 (Un point fixe $\tilde{\mathcal{F}}$)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-x^2/2}$

On pose $h(x) = x f(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}}$. On a $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$,

$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)|\,dx < +\infty$.

$\Rightarrow \hat{f}$ est dérivable et $\hat{f}'(\alpha) = -i\,\hat{h}(\alpha)$

De plus, $f'(x) = -x e^{-\frac{x^2}{2}} = -h(x)$

$$\Rightarrow \hat{f}'(\alpha) = -i\,\hat{h}(\alpha) = i\,\tilde{\mathcal{F}}[-h](\alpha) = i\,\tilde{\mathcal{F}}[f'](\alpha) = i\,(i\alpha)\,\tilde{\mathcal{F}}[f]$$

$$= -\alpha\,\hat{f}(\alpha)$$

De plus, $\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \underbrace{e^{-i.0x}}_{1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \overset{\text{Analyse II}}{=} 1$

Pour finir, $\hat{f}$ est solution de l'équation différentielle,

$$\begin{cases} \hat{f}'(\alpha) = -\alpha \hat{f}(\alpha) \\ \hat{f}(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \hat{f}(\alpha) = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$$

__Proposition 5.9__ ($\hat{f}$ en sinus et cosinus)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$. Alors,

(i) Si $f$ est paire, $\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx$

(ii) Si $f$ est impaire, $\hat{f}(\alpha) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx$

__Remarque 5.10__

(i) Au vu des formules, on a

$f$ paire $\Rightarrow \hat{f}$ paire

$f$ impaire $\Rightarrow \hat{f}$ impaire

(ii) Ceci nous donne un outil pour définir une transformée de Fourier pour des fonctions $f : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ en les étendant par (im)parité

**Définition 5.11** Produit de convolution

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|dx < +\infty$

Le produit de convolution de $f$ et $g$ noté $f * g$ est défini par

$$f*g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \cdot g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t)dt$$

**Proposition 5.12** : transformée de $f*g$

Soient $f, g \in C^{0}_{morc}(\mathbb{R})$ tq $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|dx < +\infty$

Alors, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f*g(x)|\,dx < +\infty$

$$\mathcal{F}[f*g] = \sqrt{2\pi}\,\hat{f}\cdot\hat{g}$$