Proposition 4.20 : Dérivation terme à terme des séries de Fourier

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T-périodique, C^1_{morc} et continue sur $\mathbb{R}$.

Si $f' \in C^1_{morc}$ et a_n, b_n sont les coeffs de Fourier de f,

$$Ff'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\pi}{T} n \left(-a_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} n x\right) + b_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} n x\right)\right)$$

(obtenue en dérivant $a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} n x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} n x\right)$)

$$= \frac{f'(x-0) + f'(x+0)}{2}$$

Remarque 4.21 : (i) f' pas défini partout OSEF

(ii) f continue sur $\mathbb{R}$ très important ⚠ extensions !!

(iii) Quid d'intégrer / "primitiver" la série de Fourier terme à terme ?

$$Ff(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} n x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} n x\right) \right)$$

primitive $\downarrow$

$$F\int f \overset{?}{=} \frac{a_0}{2} x + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-b_n \frac{T}{2\pi n} \cos\left(\frac{2\pi}{T} n x\right) + a_n \frac{T}{2\pi n} \sin\left(\frac{2\pi}{T} n x\right) \right)}_{\text{Ressemble à un truc plausible}}$$

Ne fait pas partie d'une série de Fourier.

Disons $a_0 = 0$, et ça marche !

Or, $a_0 = 0 \Leftrightarrow \int_0^T f(x)\,dx = 0$

Si φ une primitive de f. Si φ vérifie les hypothèses de la proposition 4.20, on aura un résultat !

Les hypothèses que φ doit vérifier

- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\boxed{T\text{-périodique}}$ $\longrightarrow$ pas garantie !!
- $\varphi \in C^1_{\text{morc}}$
- $\varphi \in C^0(\mathbb{R})$

] Gratuit dès que $f \in C_{\text{morc}}$

$$\underline{0} = \varphi(x+T) - \varphi(x) = \int_x^{x+T} \varphi'(t)\,dt = \int_x^{x+T} f(t)\,dt = \underline{\int_0^T f(t)\,dt}$$

<u>En résumé</u> : f : T-périodique C^1_{morc}

Pour dériver terme à terme, on a besoin de $f \in C^0(\mathbb{R})$

Pour primitiver terme à terme, on a besoin de $\int_0^T f(x)\,dx = 0$

Exemples 4.22

(i) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$ sur $]-1, 1]$ étendue par 2-périodicité.

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$ étendu par 2 périodicité

Exemple 4.6 $\Rightarrow$ $$Ff'(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\pi x)$$

Est-ce que $$Ff(x) \overset{?}{=} \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)} \left(- \frac{\cos((2k+1)\pi x)}{(2k+1)\cdot \pi} \right) + C$$

$\boxed{\text{OUI}}$

$$C = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \frac{2}{2} \int_{-1}^{1} |x| \, dx = 1/2$$

$\Rightarrow Ff(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\pi x)$ (comparer avec série 11 ex 3)

(ii) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

étendu par 2 périodicité

$Ff(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)} \sin((2k+1)\pi x)$

On a $f'(x) = 0 \quad \forall x \notin \mathbb{Z}$

$Ff'(x) \overset{?}{=} \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\pi(2k+1)}{2k+1} \cos((2k+1)\pi x) = 4 \sum_{k=0}^{+\infty} \cos((2k+1)\pi x)$

Non, $f \notin C^0 \Rightarrow$ on ne peut pas dériver terme à terme

Pour les exos, on anticipe sur le chapitre 6 :

Question

trouver $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tq

$$u'(x)-u(x)=2-\cos(x)+2\sin(x)+\sin(2x)-2\cos(3x)$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ trouver $x_n, y_n\in\mathbb{R}$ tq

$$\begin{cases} n\cdot y_n - x_n = a_n \\ n\cdot x_n + y_n = b_n \end{cases}$$

$\to$ donné

$\to$ bonne nouvelle, c'est les mêmes problèmes !

<u>Exemple 6.1</u>

(i) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ C^1_{morc} 2π-périodique

trouver $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-périodique tq $u'(x)-u(x)=f(x)$

On cherche u sous la forme d'une série de Fourier

$$u(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx) \right\}$$

$$u'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ n B_n \cos(nx) - n A_n \sin(nx) \right\}$$

$$\Rightarrow u' - u = -\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ (nB_n - A_n)\cos(nx) - (nA_n + B_n)\sin(nx) \right\}$$

Si a_n & b_n sont les coefficients de Fourier de f,

on a

$$-\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ (nB_n - A_n)\cos(nx) - (nA_n + B_n)\sin(nx) \right\}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right\}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{-\frac{A_0}{2} = \frac{a_0}{2}}$ $n=0$ $\Rightarrow$ $A_0 = -a_0$

$$\left\{\begin{array}{l} \boxed{nB_n - A_n = a_n} \\ \boxed{-(nA_n + B_n) = b_n} \end{array}\right. \quad n \geq 1 \quad \Rightarrow \quad A_n = \frac{-a_n - nb_n}{1+n^2}, \quad B_n = \frac{-b_n + na_n}{1+n^2}$$

$$\Rightarrow u(x) = -\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \frac{-a_n - nb_n}{1+n^2} \cos(nx) + \frac{-b_n + na_n}{1+n^2} \sin(nx) \right\}$$

Si par exemple $f(x) = 2 - \cos(x) + 2\sin(x) + \sin(2x) - 2\cos(3x)$

$\forall n \geq 4$, $a_n = b_n = 0$,

$a_0 = 4$, $a_1 = -1$, $b_1 = 2$, $a_2 = 0$, $b_2 = 1$, $a_3 = -2$, $b_3 = 0$

$\boxed{n=0}$ $A_0 = -4$

$\boxed{n=1}$ $A_1 = \dfrac{-a_1 - b_1}{2} = -\dfrac{1}{2}$, $B_1 = \dfrac{-b_1 + a_1}{2} = -\dfrac{3}{2}$

$\boxed{n=2}$ $A_2 = \dfrac{-a_2 - 2b_2}{5} = -\dfrac{2}{5}$, $B_2 = \dfrac{-b_2 + 2a_2}{5} = -\dfrac{1}{5}$

$\boxed{n=3}$ $A_3 = \dfrac{-a_3 - 3b_3}{10} = \dfrac{1}{5}$, $B_3 = \dfrac{-b_3 + 3a_3}{10} = -\dfrac{3}{5}$

$\boxed{n \geq 4}$ $A_n = B_n = 0$

$$\Rightarrow u(x) = -2 - \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{3}{2}\sin(x) - \frac{2}{5}\cos(2x) - \frac{1}{5}\sin(2x) + \frac{1}{5}\cos(3x) - \frac{3}{5}\sin(3x)$$

$u''(x) + u(-x)$

$u''(x) + u(x+\pi)$

Chapitre 5 transformée de Fourier

§ 5.1 Définition & inversion

Définition 5.1 : Transformée de Fourier, transformée de Fourier inverse

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux tq $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$ (i.e. $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ converge)

La transformée de Fourier de f, noté $\mathcal{F}[f]$ ou $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est définie par

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x}\, dx$$

Vidéo cours 2020
Semaine 11 34:42 - 55:30

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux tq
$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\alpha)|\, d\alpha < +\infty$.

La transformée de Fourier inverse noté $\mathcal{F}^{-1}[\varphi] : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
est définie par

$$\mathcal{F}^{-1}[\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha) e^{i\alpha x}\, d\alpha$$

<u>Remarque 5.2</u>

Selon le livre/article/cours que vous allez voir la définition de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^{-1}$ peuvent changer.

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\xi,\mu}[f](\alpha) = \xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\mu\alpha x}\, dx = \sqrt{2\pi} \cdot \xi \cdot \hat{\mathcal{F}}[f](\mu \cdot \alpha)$$

Pour nous $\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\mu = 1$ (idem dans le livre <u>Analyse avancée pour ingénieurs</u> Dacorogna & Tanteri

Dans <u>Analyse avancée pour math</u> par Dacorogna

$\xi = 1$, $\mu = 2\pi$

Pour chaque choix de ξ & μ les formules changent!

<u>Théorème 5.3</u> Formule d'inversion

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue tq $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)|\, d\alpha < +\infty. \quad \text{Alors,}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x}\, d\alpha = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[f]\right](x) = f(x)$$

Exemple 5.4

(i) Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \gamma & \text{si } x\,]a,b[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{où } \gamma, a, b \in \mathbb{R},\ a < b$$

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \gamma e^{-i\alpha x}\, dx$$

$$= \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{-i\alpha} e^{-i\alpha x}\right]_{x=a}^{x=b} = \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}\, i\alpha}\left(e^{-i\cdot\alpha\cdot a} - e^{-i\cdot\alpha\cdot b}\right)$$

Livre § 15.5 2)