Info : Durée de l'examen 2h !

$f : [0, T[\to \mathbb{R}$

$f :]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \to \mathbb{R}$

étendu par T-périodicité

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-périodique ; continue par morceaux

$$\forall n \geq 0, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} n x\right) dx = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} n x\right) dx$$

$$\forall n \geq 1, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} n x\right) dx = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} n x\right) dx$$

$$Ff(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} n x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} n x\right) \right)$$

$$f \in C^1_{\text{morc}} \Rightarrow Ff(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

Définition 4.10 Coefficients de Fourier complexes

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ T-périodique, C^0 morc.

On définit les coefficients de Fourier complexes def par

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\frac{2\pi}{T}nx}\,dx \quad , \quad n\in\mathbb{Z}$$

où pour $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b \mathrm{Re}(\varphi(x))dx + i\int_a^b \mathrm{Im}(\varphi(x))dx$

Proposition 4.11

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, T-périodique, C^0 morc. Alors,

(i) $\forall n\geq 1 : \; c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $\forall n\leq -1 : \; c_n = \frac{a_{-n}+ib_{-n}}{2}$, $c_0 = \frac{a_0}{2}$

(ii) $\forall n \geq 1 \quad a_n = c_n + c_{-n}, \; b_n = i(c_n - c_{-n}), \quad a_0 = 2 \cdot c_0$

(iii) $F_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i \frac{2\pi}{T} n x}$

$$Ff(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx} := \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$$

Preuve : $e^{it} = \cos t + i \sin t, \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$

§4.3 Propriétés des séries de Fourier

Proposition 4.12

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique, C^0 morc.

Alors,

(i) $Ff(x)$ est T-périodique.

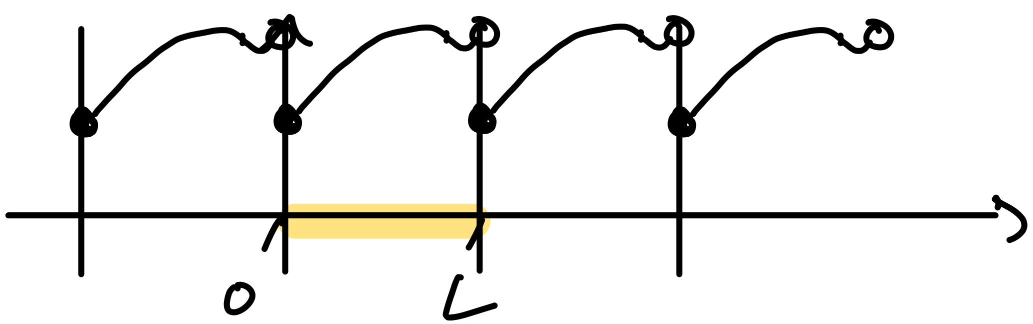
(ii) Si f est paire (i.e. $f(-x)=f(x)$) alors,

$\forall n \geq 1, \quad b_n = 0$ et $Ff(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} n x\right)$

(iii) Si f est impaire, (i.e. $f(-x) = -f(x)$), alors,

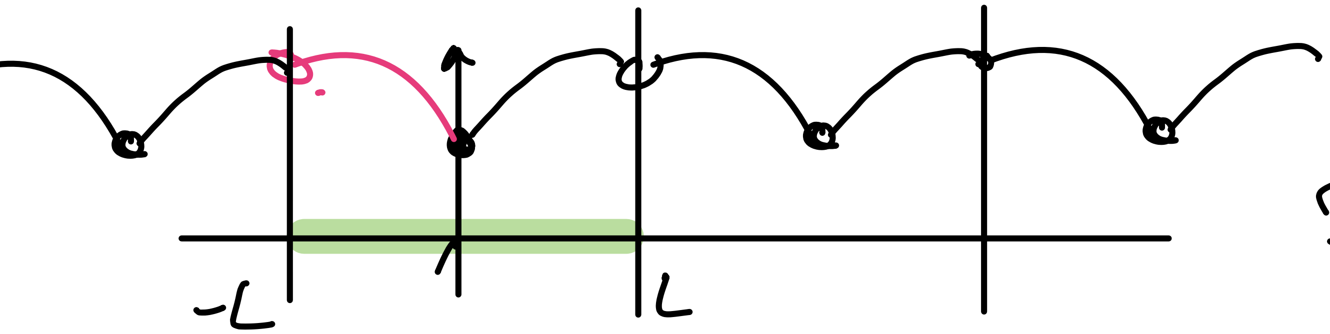
$\forall n \geq 0, \quad a_n = 0, \quad Ff(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} n x\right)$

"Preuve" $\underbrace{\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \boxed{} \left(\frac{2\pi}{T} n x\right)}_{\text{si impair, } \int = 0} dx \qquad \boxed{} = \sin \text{ ou } \cos$



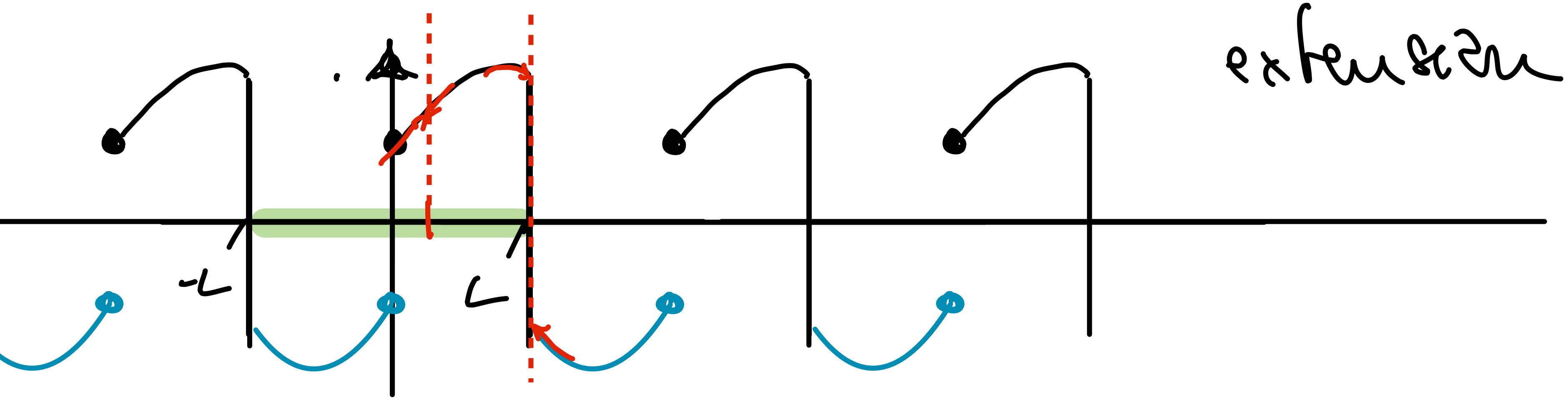
extension L-périodique

$\to Ff(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1 a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} n x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} n x\right)$



extension paire, 2L-périodique

$$Ff(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} n x\right)$$



extension impaire, 2L-périodique

Proposition 4.13 Série de Fourier en cosinus

Soit $L > 0$, $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ C^1 par morceaux. La série de Fourier en cosinus de f est

$$F_c f(x) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{a}_n \cos\left(\frac{\pi}{L} n x\right) \quad \text{où} \quad \tilde{a}_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{\pi}{L} n x\right) dx$$

De plus, $F_c f$ converge vers

$$F_c f(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} & \text{si } x \in]0,L[\\ f(0+0) & \text{si } x = 0 \\ f(L-0) & \text{si } x = L \end{cases}$$

<u>Proposition 4.14</u> Série de Fourier en sinus

Soit $L>0$, $f:[0,L] \to \mathbb{R}$ C^1 par morceaux. La série de Fourier en sinus de f est

$$F_s f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{b}_n \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right) \text{ où } \tilde{b}_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right) dx$$

De plus, $F_s f$ converge vers

$$F_s f(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x-0) + f(x+0)}{2} & \text{si } x \in]0, L[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } L \end{cases}$$

"Idée de la preuve" : calculer les séries de Fourier des différentes extensions + Dirichlet

Exemple 4.15

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$

$$\tilde{a}_0 = \frac{2}{1} \int_0^1 x\,dx = \underline{1}$$

$$\tilde{a}_n = 2 \cdot \int_0^1 x \cdot \cos(\pi \cdot n x)\,dx = \ldots = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ -\dfrac{4}{\pi^2 (2k-1)^2} & \text{si } n = 2k-1 \\ & k \geq \underline{1}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_c f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-4}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos(\pi (2k-1) x)$$

$$\tilde{b}_n = \frac{2}{1} \int_0^1 x \sin(\pi n x)\,dx = \ldots = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi \cdot n}$$

$$\Rightarrow F_s f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi \cdot n} \sin(\pi \cdot n \cdot x)$$

Remarque : Si $f \in C^0([0,L]) \cap C^1_{morc}([0,L])$

l'extension paire puis $2L$-périodique est continue sur $\mathbb{R}$.

l'extension impaire puis $2L$-périodique est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $f(0) = f(L) = 0$

Théorème 4.16 Identité de Parseval

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^1 par morceaux T-périodique

Alors, $$\frac{2}{T}\int_0^T f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2$$

Remarque 4.17

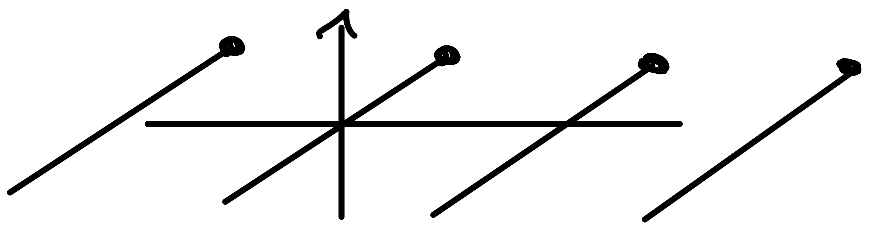
(i) Le théorème reste vrai sous l'hypothèse $|f|$ et f^2 sont intégrables

(ii) Une nouvelle méthode pour calculer des séries

Exemple 4.18

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{2} \quad \text{si } x \in]-\pi, \pi] \text{ étendue par } 2\pi\text{-périodicité}$$



f impaire $\Rightarrow a_n = 0 \ \forall n \geq 0.$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2}\sin(nx)\,dx = \dots = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

De plus, $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{4}\,dx = \frac{\pi^2}{6}$

On a donc

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \overset{\text{Parseval}}{=} \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(0^2 + \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)^2\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

<u>Remarque 4.19</u> : Dirichlet ou Parseval ?

Un exercice typique : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T-périodique

1) Calculer la série de Fourier (i.e. a_n & b_n)

2) En déduire la valeur de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$

Pour 2) comment choisir entre Dirichlet et Parseval ?

Comparer l'ordre (i.e. la plus grande puissance de n qui apparaît) de a_n & b_n avec c_n

Si l'ordre est le même $\to$ Dirichlet

Si l'ordre de c_n = 2 · l'ordre de a_n & b_n $\to$ Parseval.

Proposition 4.20 (Dérivation terme à terme des séries de Fourier)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique, C^1_{morc} et continue sur $\mathbb{R}$. Si $f' \in C^1_{morc}$ et a_n, b_n sont les coefficients de Fourier de f, on a

$$Ff'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\pi}{T} n \left(-a_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + b_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right)\right)$$

$$= \frac{f'(x-0) + f'(x+0)}{2}$$

$$a_n' = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx \stackrel{IPP}{=} \ldots$$

On peut s'en souvenir :

$$Ff'(x) = (Ff)'(x) = \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\left(\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right)\right)'$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\left\{a_n\left(\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right)' + b_n\left(\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right)'\right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\pi}{T}n\left(-a_n\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + b_n\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right)$$

Remarque 4.21

(i) f' n'est en fait pas défini partout, mais ça n'est pas un problème

ni $\int_0^T \dots dx$ ni $\frac{f'(x-0)+f'(x+0)}{2}$ ne

voit ce qu'il se passe sur des points isolés.