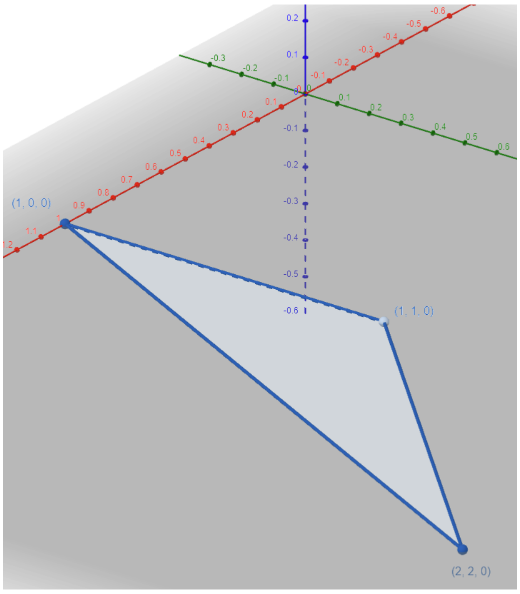
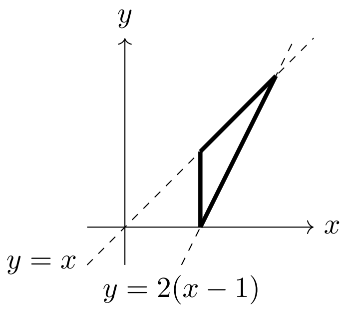
Exercice 1 (ex 7.7 p. 89, corrigé p. 97).
Vérifier le théorème de Stokes pour $F(x, y, z) = (0, x^2, 0)$ et Σ le triangle de sommets $(1, 0, 0), (2, 2, 0)$ et $(1, 1, 0)$.
Solution :
Calcul $\operatorname{rot} F(x, y, z)$ **:**
On a
$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}$$
Dessin Σ **:**
On observe que Σ est dans le plan $z = 0$:





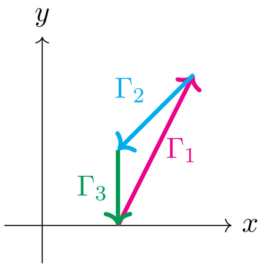
Observons que le domaine dans $\mathbb{R}^2$ est y-simple. On peut également le découper en deux domaines x simples, mais dans ce cas, il faut faire attention à choisir la même orientation de la normale dans les deux parties de l'intégrale. On présente donc que la variante y simple (On pourrait aussi utiliser les coordonnées triangulaires vues dans la série 1, mais là, c'est quand même un peu overkill)
Calcul $\iint_\Sigma \operatorname{rot} F ds$ **:**
On paramétrise Σ avec $\sigma \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x \leq 2, \ 2(x-1) \leq y \leq x\right\} \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$\sigma(x, y) = (x, y, 0)$$

On a

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot} F(\sigma(x,y)) &= (0,0,2x)\\
\sigma_x \wedge \sigma_y &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\
\iint_\Sigma \operatorname{rot} F ds &= \int_1^2\int_{2x-2}^{x} \langle (0,0,2x),(0,0,1)\rangle\, dydx\\
&= \int_1^2 2x\,(x-(2x-2))\,dx\\
&= \int_1^2 4x-2x^2dx\\
&= \left[2x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_{x=1}^{x=2}\\
&= 8-\frac{16}{3}-2+\frac{2}{3}\\
&= \frac{24-16-6+2}{3} = \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

Calcul $\int_{\partial\Sigma} F\ dl$ **:**

Le bord de $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 1\le x\le 2,\ 2(x-1)\le y\le x\}$ se sépare en 3 parties :



$\boxed{\Gamma_1}$ $\oplus$

$$
\begin{aligned}
&\gamma_1 \colon [1,2]\to\mathbb{R}^2\\
&\gamma_1(t) = (t,2t-2)\\
&\sigma\circ\gamma_1(t) = (t,2t-2,0)\\
&(\sigma\circ\gamma_1)'(t) = (1,2,0)
\end{aligned}
$$

$\boxed{\Gamma_2}$ $\ominus$

$$
\begin{aligned}
&\gamma_2 \colon [1,2]\to\mathbb{R}^2\\
&\gamma_2(t) = (t,t)\\
&\sigma\circ\gamma_1(t) = (t,t,0)\\
&(\sigma\circ\gamma_2)'(t) = (1,1,0)
\end{aligned}
$$

$\boxed{\Gamma_3}$ $\ominus$

$$
\begin{aligned}
&\gamma_3 \colon [0,1]\to\mathbb{R}^2\\
&\gamma_3(t) = (1,t)\\
&\sigma\circ\gamma_3(t) = (1,t,0)\\
&(\sigma\circ\gamma_3)'(t) = (0,1,0).
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma(\Gamma_1)} F \cdot dl &= \int_1^2 \Big\langle (0,t^2,0),(1,2,0)\Big\rangle \, dt = \int_1^2 2t^2 dt = \left[\frac{2}{3}t^3\right]_{t=1}^{t=2} \\
&= \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \\
\int_{\sigma(\Gamma_2)} F \cdot dl &= \int_1^2 \Big(0,t^2,0),(1,1,0)\Big\rangle \, dt = \int_1^2 t^2 dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_{t=1}^{t=2} \\
&= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \\
\int_{\sigma(\Gamma_3)} F \cdot dl &= \int_0^1 \langle (0,1,0),(0,1,0)\rangle \, dt = \int_0^1 1 dt = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl &= + \int_{\sigma(\Gamma_1)} F \cdot dl - \int_{\sigma(\Gamma_2)} F \cdot dl - \int_{\sigma(\Gamma_3)} F \cdot dl \\
&= \frac{14}{3} - \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3},
\end{aligned}$$

qui est le résultat attendu.

Exercice 2 (ex 7.6 p. 89, corrigé p. 96)**.**
Vérifier le théorème de Stokes pour $F(x,y,z) = (0,0,y+z^2)$ et

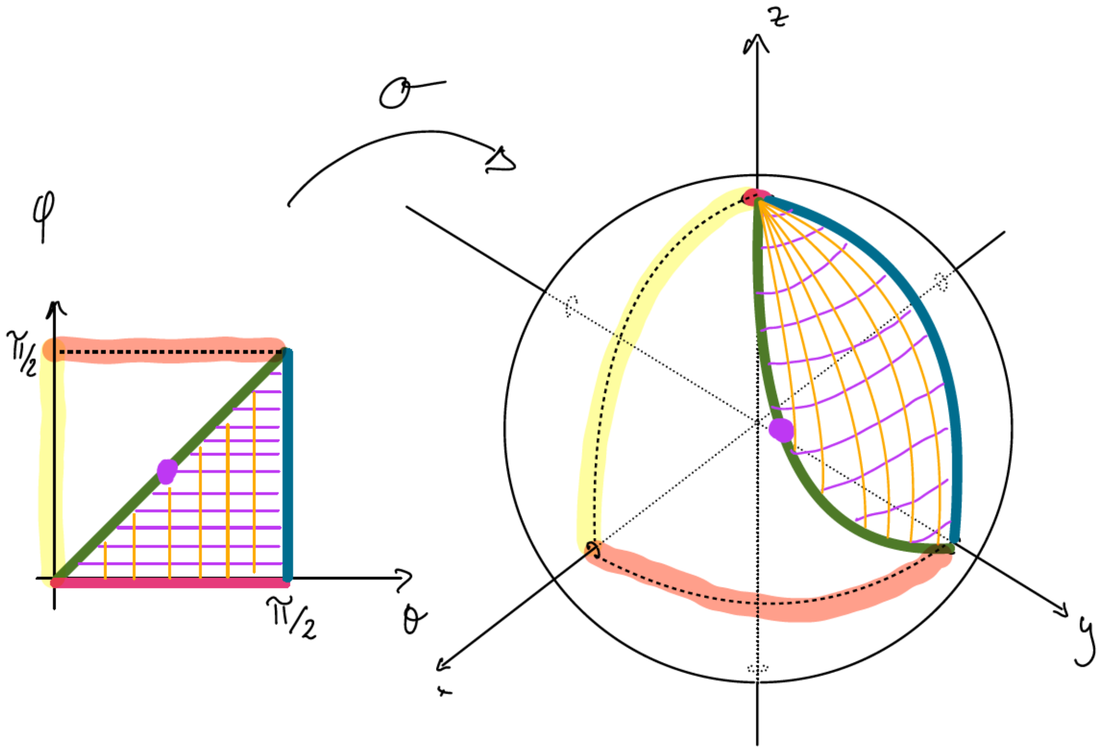
$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4, \ x,y,z \geq 0, \ 0 \leq \arccos\frac{z}{2} \leq \arctan\frac{y}{x} \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Solution :
Calcul $\operatorname{rot} F(x,y,z)$ **:**
On a

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & y+z^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dessin Σ **:**
On passe en coordonnées sphériques $(x,y,z) = (r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)$ avec $r \geq 0$, $\theta \in [-\pi,\pi]$ et $\varphi \in [0,\pi]$. Nos conditions deviennent

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+z^2 = 4 &\Leftrightarrow r = 2 \\
x,y \geq 0 &\Leftrightarrow \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\
z \geq 0 &\Leftrightarrow \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\
0 \leq \arccos\frac{z}{2} \leq \arctan\frac{y}{x} \leq \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow 0 \leq \varphi \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$



Calcul $\displaystyle\iint_\Sigma \operatorname{rot} F ds$ **:**
On paramétrise Σ avec $\sigma\colon \left\{(\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^2 \ : \ 0\le\varphi\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}\to\mathbb{R}^3$ définie par

$$\sigma(\theta,\varphi) = (2\cos\theta\sin\varphi, 2\sin\theta\sin\varphi, 2\cos\varphi)$$

On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} F(\sigma(\theta,\varphi)) &= (1,0,0)\\
\sigma_\theta\wedge\sigma_\varphi &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ -2\sin\theta\sin\varphi & 2\cos\theta\sin\varphi & 0\\ 2\cos\theta\cos\varphi & 2\sin\theta\cos\varphi & -2\sin\varphi\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}-4\cos\theta\sin^2\varphi\\ -4\sin\theta\sin^2\varphi\\ -4\sin\varphi\cos\varphi\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Variante 1 : $d\varphi d\theta$

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \operatorname{rot} F ds =& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\theta} \Big\langle (1,0,0)\,, \Big(-4\cos\theta\sin^2\varphi, -4\sin\theta\sin^2\varphi, -4\sin\varphi\cos\varphi\Big)\Big\rangle\, d\varphi d\theta \\
=& -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \int_0^{\theta} \sin^2\varphi d\varphi d\theta \\
=& -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \left[\frac{1}{2}\left(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\right)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\theta} d\theta \\
=& -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \frac{1}{2}\left(\theta - \sin\theta\cos\theta\right) d\theta \\
=& -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\cos\theta - \sin\theta\cos^2\theta d\theta \\
=& -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\cos\theta d\theta - \left[\frac{2}{3}\cos^3\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\
=& -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\cos\theta d\theta + \frac{2}{3} \qquad \left|\begin{array}{ll} u=\theta & v=\sin\theta \\ u'=1 & v'=\cos\theta \end{array}\right. \\
\overset{\text{IPP}}{=}& -2\left(\left[\theta\sin\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta\right) + \frac{2}{3} \\
=& -\pi - 2\left[\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{3} \\
=& -\pi + 2 + \frac{2}{3} \\
=& \frac{8}{3} - \pi
\end{aligned}$$

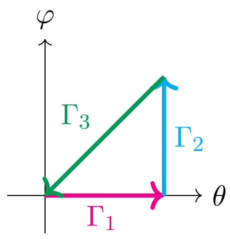
Variante 2 : $d\theta d\varphi$

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \operatorname{rot} F ds =& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} \Big\langle (1,0,0)\,, \Big(-4\cos\theta\sin^2\varphi, -4\sin\theta\sin^2\varphi, -4\sin\varphi\cos\varphi\Big)\Big\rangle\, d\theta d\varphi \\
=& -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta d\varphi \\
=& -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \left[\sin\theta\right]_{\theta=\varphi}^{\theta=\frac{\pi}{2}} d\varphi \\
=& -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi - \sin^3\varphi d\varphi \\
=& -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi - \sin\varphi\left(1-\cos^2\varphi\right) d\varphi \\
=& 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin^2\varphi + \sin\varphi - \cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi \\
=& 4\left[-\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\cos\varphi\sin\varphi - \cos\varphi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \\
=& -\pi + 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} - \pi
\end{aligned}$$

On aurait aussi pu trouver les primitives des fonctions trigonométriques en utilisant les formules d'Euler.

Calcul $\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$

Le bord de $A = \left\{(\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \ :\ 0 \leq \varphi \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ se sépare en 3 parties :



$\boxed{\Gamma_1}$ $\quad \gamma_1 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ $\oplus$

$\gamma_1(t) = (t, 0)$

$\sigma \circ \gamma_1(t) = (0, 0, 2)$

est un point, on enlève !

$\boxed{\Gamma_2}$ $\quad \gamma_2 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ $\oplus$

$\gamma_2(t) = \left(\frac{\pi}{2}, t\right)$

$\sigma \circ \gamma_2(t) = (0, 2\sin t, 2\cos t)$

$(\sigma \circ \gamma_2)'(t) = (0, 2\cos t, -2\sin t)$

$\boxed{\Gamma_3}$ $\quad \gamma_3 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\ominus$

$\gamma_3(t) = (t, t)$

$\sigma \circ \gamma_3(t) = \left(2\cos t \sin t, 2\sin^2 t, 2\cos t\right)$

$(\sigma \circ \gamma_3)'(t) = \left(-2\sin^2 t + 2\cos^2 t, 4\sin t\cos t, -2\sin t\right)$

Ainsi,

$$\int_{\sigma(\Gamma_2)} F \cdot dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\langle \left(0,0,2\sin t + 4\cos^2 t\right), (0, 2\cos t, -2\sin t) \right\rangle dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -4\sin^2 t - 8\sin t \cos^2 t dt$$
$$= \left[-2\left(t - \sin t \cos t\right) + \frac{8}{3}\cos^3 t\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}$$
$$= -\pi - \frac{8}{3}$$

$$\int_{\sigma(\Gamma_3)} F \cdot dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\langle \left(0,0,2\sin^2 t + 4\cos^2 t\right), \left(-2\sin^2 t + 2\cos^2 t, 4\sin t\cos t, -2\sin t\right) \right\rangle dt$$
$$= -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t + 2\sin t\cos^2 t dt$$
$$= -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t - \sin t\cos^2 t + 2\sin t \cos^2 t dt$$
$$= -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t + \sin t\cos^2 t dt$$
$$= -4\left[-\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}$$
$$= -4 - \frac{4}{3} = -\frac{16}{3}$$

$$\int_\Sigma F \cdot dl = + \int_{\sigma(\Gamma_2)} F \cdot dl - \int_{\sigma(\Gamma_3)} F \cdot dl = \frac{8}{3} - \pi$$

qui est bien le résultat attendu.

Exercice 3 (ex 14.1 p. 219, corrigé p. 223)**.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique telle que $f(x) = e^{(x-\pi)}$ sur $[0, 2\pi[$.

(i) Esquisser le graphe de f et le graphe de f'.

(ii) Calculer la série de Fourier Ff de la fonction f.

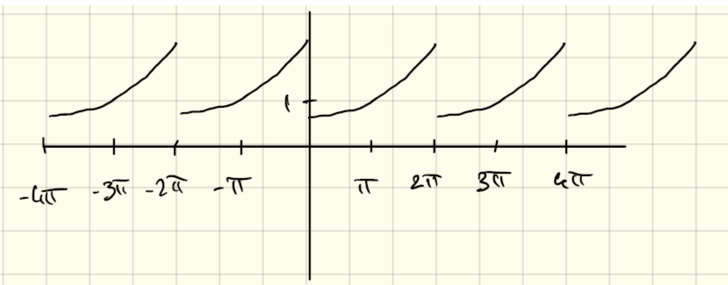
(iii) A l'aide du théorème de Dirichlet, comparer Ff et f sur $[0, 2\pi]$.

(iv) A l'aide des deux questions précédentes, montrer que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi}{e^\pi - e^{-\pi}}.$$

Solution :

(i) Les graphes de f et f' sont les mêmes.



(ii) On a ici $T = 2\pi$ et $f(x) = e^{x-\pi}$ pour $x \in]0, 2\pi[$. Ainsi, pour $n \geq 1$,

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{x-\pi}dx = \frac{1}{\pi}\left[e^{x-\pi}\right]_{x=0}^{x=2\pi} = \frac{1}{\pi}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) = \frac{2\sinh\pi}{\pi}$$

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx \\ =& \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi} e^{x-\pi}\cos(nx)\,dx}_{:=I} \end{aligned}$$

On est ici face à une intégrande où on peut intégrer/primitiver les deux parties du produit autant de fois qu'on veut. On utilise dont l'IPP pour trouver une équation pour notre intégrale [1].

$$I = \int_0^{2\pi} \underbrace{e^{x-\pi}}_{u'}\underbrace{\cos(nx)}_{v}\,dx \qquad \left|\begin{array}{ll} u = e^{x-\pi} & v = \cos(nx) \\ u' = e^{x-\pi} & v' = -n\sin(nx) \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} &\overset{\text{IPP}}{=} \left[e^{x-\pi}\cos(nx)\right]_{x=0}^{x=2\pi} + n\int_0^{2\pi} e^{x-\pi}\sin(nx)dx \\ &= e^{\pi} - e^{-\pi} + n\int_0^{2\pi} \underbrace{e^{x-\pi}}_{u'}\underbrace{\sin(nx)}_{v}\,dx \qquad \left|\begin{array}{ll} u = e^{x-\pi} & v = \sin(nx) \\ u' = e^{x-\pi} & v' = n\cos(nx) \end{array}\right. \\ &= e^{\pi} - e^{-\pi} + n\left(\left[e^{x-\pi}\sin(nx)\right]_{x=0}^{x=2\pi} - n\int_0^{2\pi} e^{x-\pi}\cos(nx)dx\right) \\ &= e^{\pi} - e^{-\pi} - n^2 I \end{aligned}$$

Ainsi, I est solution de

$$I = e^{\pi} - e^{-\pi} - n^2 I$$

et donc

$$I = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{1+n^2} = \frac{2\sinh(\pi)}{1+n^2}$$

et pour finir le calcul des coefficients de Fourier réels en cosinus :

$$a_n = \frac{1}{\pi}I = \frac{2\sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)}$$

De plus,

$$\begin{aligned} b_n =& \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx \\ =& \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{x-\pi}\sin(nx)\,dx \end{aligned}$$

Remarquons que grâce au calcul que nous avons fait pour I, on a déjà calculé cette intégrale :

$$\begin{aligned} I =& e^{\pi} - e^{-\pi} + n\int_0^{2\pi} e^{x-\pi}\sin(nx)dx \\ \Rightarrow \int_0^{2\pi} e^{x-\pi}\sin(nx)dx =& \frac{1}{n}\left(I - e^{\pi} + e^{-\pi}\right) \\ =& \frac{1}{n}\left(\frac{2\sinh(\pi)}{1+n^2} - 2\sinh(\pi)\right) \\ =& \frac{1}{n}\frac{2\sinh(\pi) - 2\sinh(\pi) - 2n^2\sinh(\pi)}{1+n^2} \\ =& \frac{-2n\sinh(\pi)}{1+n^2} \end{aligned}$$

1. pour un rappel sur la technique, voir exemple 9.17 (ii) ici : `https://sma.epfl.ch/~struett/analyse1/main_proofs_at_the_end.pdf#theorem.9.17`

et on conclut

$$b_n = \frac{-2n\sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)}$$

et

$$\begin{aligned}
Ff(x) =& \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx + b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\right)\\
=& \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)}\cos(nx) - \frac{2n\sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)}\sin(nx)\right)\\
=& \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi(1+n^2)}\cos(nx) + \frac{n\left(e^{-\pi}-e^{\pi}\right)}{\pi(1+n^2)}\sin(nx)\right)
\end{aligned}$$

Pour voir l'approximation : `https://www.geogebra.org/calculator/q3utr3xp`

(*iii*) Au graphes, on voit que f est C^1 par morceaux. Par le théorème de Dirichlet, on a donc

$$Ff(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f \text{ est continue en } x\\ \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} & \text{sinon.}\end{cases}$$

Sur le graphe également, on observe que f est continue sur $]0, 2\pi[$. De plus en $x = 0$ et $x = 2\pi$,

$$Ff(x) = \frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2} = \cosh(\pi),$$

tandis que

$$f(x) = f(0) = e^{-\pi}.$$

(*iv*) On aimerait trouver

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

À partir de

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)}\cos(nx) - \frac{2n\sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)}\sin(nx)\right)$$

En comparant le comportement en n de nos différents termes, a que $\frac{(-1)^n}{1+n^2}$ ressemble plus à la partie en cosinus avec $\frac{2\sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)}$ qu'à la partie en sinus avec $\frac{2n\sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)}$ qui a un n en trop au numérateur.

On aimerait donc choisir x de telle sorte que $\cos(nx) = (-1)^n$ et $\sin(nx) = 0$. En prenant $x = \pi$, on a exactement ceci. Ainsi, par le point précédent,

$$\begin{aligned}
1 =& f(\pi) = Ff(\pi) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)}\cos(n\pi) - \frac{2n\sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)}\sin(n\pi)\right)\\
=& \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)}(-1)^n \qquad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi}{2\sinh(\pi)} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

En sortant le terme $n = 1$ de la somme, on conclut

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2} + \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2\sinh(\pi)} = \frac{\pi}{e^{\pi}-e^{-\pi}}.$$

qui est le résultat voulu.

Exercice 4 (ex 14.2 p. 220, corrigé p. 224)**.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique telle que $f(x) = (x-\pi)^2$ sur $[0, 2\pi[$.

(i) Esquisser le graphe de f et le graphe de f'.

(ii) Calculer la série de Fourier Ff de la fonction f.

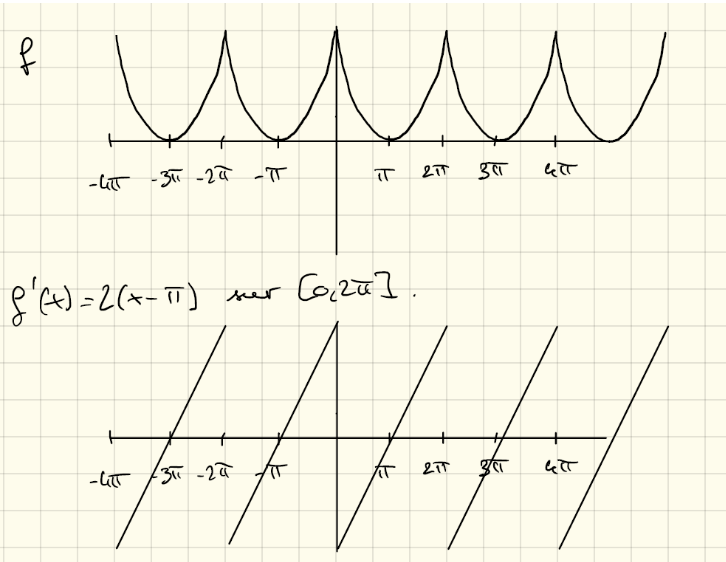
(iii) A l'aide du théorème de Dirichlet, comparer Ff et f sur $[0, 2\pi]$.

(iv) En déduire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Solution :

(i)



(ii) On a ici $T = 2\pi$ et $f(x) = (x-\pi)^2$ pour $x \in]0, 2\pi[$. Ainsi, pour $n \geq 1$,

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{3} (x-\pi)^3 \right]_{x=0}^{x=2\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\begin{aligned}
a_n =& \frac{2}{T} \int_0^T f(x)(x-\pi)^2 \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) dx \\
=& \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{(x-\pi)^2}_{u} \underbrace{\cos(nx)}_{v'} dx
\end{aligned}
\qquad \left| \begin{array}{ll} u = (x-\pi)^2 & v = \frac{1}{n}\sin(nx) \\ u' = 2(x-\pi) & v' = \cos(nx) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
\overset{\text{IPP}}{=}& \frac{1}{\pi} \left[(x-\pi)^2 \frac{1}{n} \sin(nx) \right]_{x=0}^{x=2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 2(x-\pi) \frac{1}{n} \sin(nx) dx \\
=& -\frac{2}{n\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{(x-\pi)}_{u} \underbrace{\sin(nx)}_{v'} dx
\end{aligned}
\qquad \left| \begin{array}{ll} u = x-\pi & v = -\frac{1}{n}\cos(nx) \\ u' = 1 & v' = \sin(nx) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
\overset{\text{IPP}}{=}& -\frac{2}{n\pi} \left[-(x-\pi) \frac{1}{n} \cos(nx) \right]_{x=0}^{x=2\pi} - \frac{2}{n\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{n} \cos(nx) dx \\
=& \frac{2(\pi - (-\pi))}{n^2 \pi} - \frac{2}{n^2 \pi} \left[\frac{1}{n} \sin(nx) \right]_{x=0}^{x=2\pi} \\
=& \frac{4}{n^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_n =& \frac{2}{T}\int_0^T f(x)(x-\pi)^2\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx \\
=& \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{(x-\pi)^2}_{u}\underbrace{\sin(nx)}_{v'}\,dx \\
\overset{\text{IPP}}{=}& \frac{1}{\pi}\left[(x-\pi)^2\frac{-1}{n}\cos(nx)\right]_{x=0}^{x=2\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\cos(nx)dx \\
=& \frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi}\underbrace{(x-\pi)}_{u}\underbrace{\cos(nx)}_{v'}\,dx \\
=& \frac{2}{n^2\pi}\left([(x-\pi)\sin(nx)]_{x=0}^{x=2\pi} - \int_0^{2\pi}\sin(nx)dx\right) \\
=& 0
\end{aligned}
$$

$$
\left|\begin{array}{ll} u=(x-\pi)^2 & v=\frac{-1}{n}\cos(nx) \\ u'=2(x-\pi) & v'=\sin(nx)\end{array}\right.
$$

$$
\left|\begin{array}{ll} u=x-\pi & v=\frac{1}{n}\sin(nx) \\ u'=1 & v'=\cos(nx)\end{array}\right.
$$

En réalité on peut observer sur le graphe que f est paire et donc, on peut tout de suite en déduire que la série de Fourier de f n'a pas de partie en sinus.
On conclut donc

$$
\begin{aligned}
Ff(x) =& \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx + b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\right) \\
=& \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cos(nx)
\end{aligned}
$$

Pour voir l'approximation : `https://www.geogebra.org/calculator/bphvszwe`

(iii) En observant le graphe, on voit que f est C^1 par morceaux et continue et donc pour tout x,

$$
Ff(x) \overset{\text{Dirichlet}}{=} \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \overset{f\in C^0}{=} f(x)
$$

(iv) On veut calculer $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ à partir de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cos(nx)$, il faut choisir x de telle sorte que $\cos(nx)=1$ (le 4, on peut le sortir de la série sans problème.) Ici, $x=0$ fait l'affaire. On a donc

$$
\pi^2 = f(0) = Ff(0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\underbrace{\cos(0)}_{=1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.
$$

On veut calculer $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ à partir de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cos(nx)$, il faut choisir x de telle sorte que $\cos(nx)=(-1)^n$. Ici, $x=\pi$ fait l'affaire. On a donc

$$
0 = f(\pi) = Ff(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}
$$

Exercice 5.
Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et périodiques de période 2π. On considère la fonction

$$
h(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,dt.
$$

(i) Exprimer les coefficients de Fourier **complexes** de h en fonction de ceux de f et g.
Suggestion : Utilisez une feinte du loup $x = x - t + t$

(ii) En déduire les coefficients de Fourier **réels** de h en fonction de ceux de f et g.

Solution :
On observe tout d'abord que h est aussi continue (par morceaux) et 2π-périodique. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose c_n^f, c_n^g, et c_n^h les n-ièmes coefficients de Fourier complexes de f, g, et h respectivement. On calcule

$$\begin{aligned}
c_n^h &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(x)e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,dt\right)e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-int}\left(\int_0^{2\pi} f(x-t)e^{-in(x-t)}\,dx\right)dt \\
&= 2\pi\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-int}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)e^{-iny}\,dy\right)dt \\
&= 2\pi c_n^f c_n^g.
\end{aligned}$$

On a procédé au changement de variable $y = x - t$.
Par les formules du cours, on peut déduire les coefficients de Fourier réels a_k^h et b_k^h de h :

$$a_0^h = 2c_0^h = 4\pi c_0^f c_0^g = \pi a_0^f a_0^g.$$

Pour $k \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
a_k^h = c_k^h + c_{-k}^h &= 2\pi\left[c_k^f c_k^g + c_{-k}^f c_{-k}^g\right] \\
&= 2\pi\left[\left(\frac{a_k^f - ib_k^f}{2}\right)\left(\frac{a_k^g - ib_k^g}{2}\right) + \left(\frac{a_k^f + ib_k^f}{2}\right)\left(\frac{a_k^g + ib_k^g}{2}\right)\right] \\
&= \pi\left[a_k^f a_k^g - b_k^f b_k^g\right].
\end{aligned}$$

De manière similaire, pour $k \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
b_k^h = i\left(c_k^h - c_{-k}^h\right) &= 2\pi i\left[c_k^f c_k^g - c_{-k}^f c_{-k}^g\right] \\
&= 2\pi i\left[\left(\frac{a_k^f - ib_k^f}{2}\right)\left(\frac{a_k^g - ib_k^g}{2}\right) - \left(\frac{a_k^f + ib_k^f}{2}\right)\left(\frac{a_k^g + ib_k^g}{2}\right)\right] \\
&= \pi\left[a_k^f b_k^g + b_k^f a_k^g\right].
\end{aligned}$$

Remarque 1.
La fonction h est souvent appelée la *convolution* de la foncton f avec la fonction g, et on la note par $f * g$. Une définition alternative de cet "opérateur" de convolution $*$ est

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,dt.$$

Avec cette définition, on obtient que $c_n^{f*g} = c_n^f c_n^g$. C'est à dire que l'opération de convolution de fonctions se traduit par une multiplication pour les coefficients de Fourier (une propriété analogue sera observée pour la transformée de Fourier et la transformée de Laplace). Avec cette définition on trouve aussi :

$$a_k^{f*g} = c_k^{f*g} + c_{-k}^{f*g} = c_k^f c_k^g + c_{-k}^f c_{-k}^g = \frac{a_k^f a_k^g - b_k^f b_k^g}{2},$$

$$b_k^{f*g} = i(c_k^{f*g} - c_{-k}^{f*g}) = i(c_k^f c_k^g - c_{-k}^f c_{-k}^g) = \frac{a_k^f b_k^g + b_k^f a_k^g}{2}$$

pour $k \in \mathbb{N}^*$ et

$$a_0^{f*g} = 2c_0^{f*g} = 2c_0^f c_0^g = \frac{a_0^f a_0^g}{2}.$$