Exercice 1 (ex 6.3 p. 66, corrigé p. 71)**.**
Vérifier le théorème de la divergence pour $F(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ et

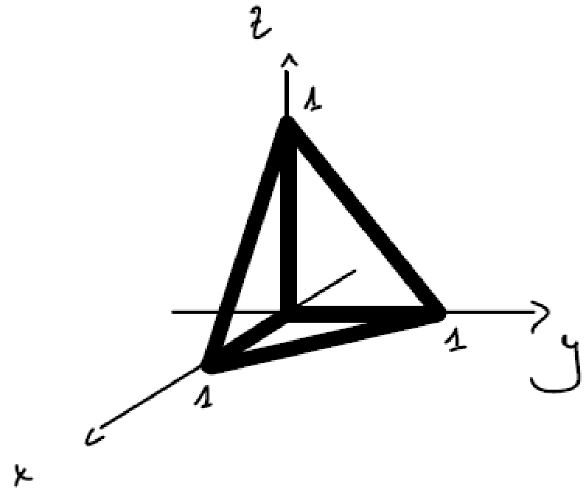
$$\Omega = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1 - x - y,\ 0 < y < 1 - x,\ 0 < x < 1\Big\}.$$

Solution :
Calcul $\operatorname{div} F$:
On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, z) =& \frac{\partial}{\partial x}[xy] = y \\
\frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, z) =& \frac{\partial}{\partial y}[yz] = z \\
\frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z) =& \frac{\partial}{\partial z}[xz] = x \\
\operatorname{div} F(x, y, z) =& x + y + z.
\end{aligned}$$

Calcul $\iiint_\Omega \operatorname{div} F(x, y, z)dxdydz$:
On reste en coordonnées cartésiennes. Vu que toutes les conditions sont affines, on s'attend à ce que le domaine soit une région coincée entre des bouts de plans. On regarde rapidement où ces choses coupent les axes pour pouvoir faire un dessin :

$$\begin{aligned}
(0, 0, z) \in \Omega \quad &\Leftrightarrow \quad 0 < z < 1 \\
(0, y, 0) \in \Omega \quad &\Leftrightarrow \quad 0 < y < 1 \\
(x, 0, 0) \in \Omega \quad &\Leftrightarrow \quad 0 < x < 1
\end{aligned}$$



On a

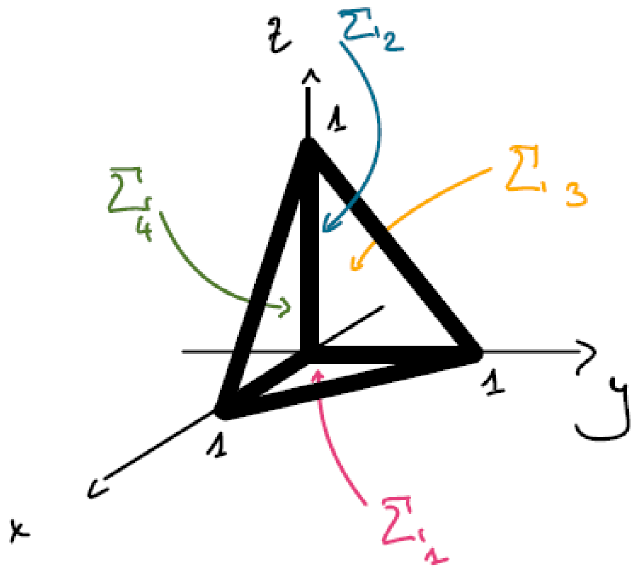
$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega \operatorname{div} F(x,y,z) dxdydz &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (x+y+z) dzdydx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} x - x^2 - xy + y - xy - y^2 + \frac{1}{2}(1-x-y)^2 \, dydz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} -x^2 - y^2 - 2xy + x + y \\
&\qquad + \frac{1}{2}\left(1 + x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2xy\right) dydx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - xy + \frac{1}{2} dydx \\
&= \int_0^1 -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}(1-x)^3 - \frac{1}{2}x(1-x)^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\
&\qquad - \frac{1}{6}\left(1 - 3x + 3x^2 - x^3\right) - \frac{1}{2}x\left(1 - 2x + x^2\right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\
&\qquad - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x + x^2 - \frac{1}{2}x^3 dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} dx \\
&= \frac{1}{24} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Calcul $\iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, ds$**, Variante 1 :** On utilise la formule

$$\iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, ds = \pm \iint_A \langle F(\sigma(u,v)), \sigma_u \wedge \sigma_v \rangle \, dudv,$$

où le signe $\pm$ dépend de si $\sigma_u \wedge \sigma_v$ pointe vers l'extérieur $(+)$ ou l'intérieur $(-)$
Le bord de Ω se sépare en 4 parties :

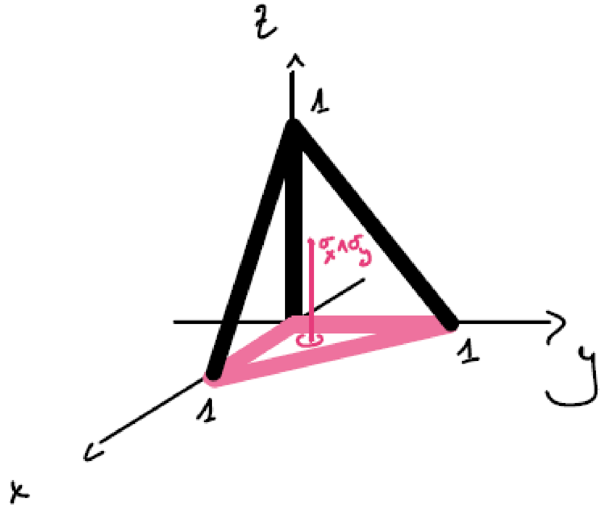
$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 0, \ 0 \le y \le 1-x, \ 0 \le x \le 1\right\} \to \mathbb{R}^3 \\
\Sigma_2 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 1-x-y, \ 0 \le y \le 1-x, \ 0 \le x \le 1\right\} \\
\Sigma_3 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = 0, \ 0 \le y \le 1, \ 0 \le z \le 1-y\right\} \\
\Sigma_4 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y = 0, \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le z \le 1-x\right\}
\end{aligned}$$



On a
$\boxed{\Sigma_1 :}$

$$
\begin{aligned}
\sigma \colon \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq y \leq 1-x, \ 0 \leq x \leq 1\Big\} &\to \mathbb{R}^3 \\
\sigma(x,y) =& (x,y,0) \\
F(\sigma(x,y)) =& (xy,0,0) \\
\sigma_x \wedge \sigma_y =& \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Cette normale est intérieure. En effet, Σ_1 étant le dessous du domaine, on s'attend à ce que la normale extérieure pointe vers le bas, i.e. on s'attend à ce que la normale ait une troisième composante négative. Ici, 1 est positif. On peut aussi le voir sur le dessin :



Ainsi,

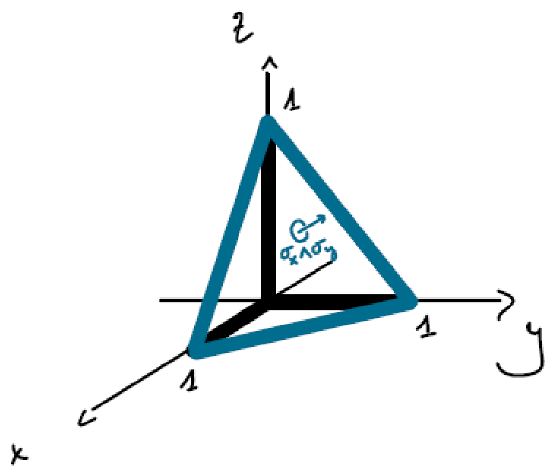
$$\iint_{\Sigma_1} \langle F, \nu \rangle \, ds = - \int_0^1 \int_0^{1-x} \langle (xy,0,0),(0,0,1) \rangle \, dydx = 0$$

Passons à la partie du bord suivante :

$\boxed{\Sigma_2 :}$

$$\begin{aligned}
\sigma\colon \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ 0\le y\le 1-x,\ 0\le x\le 1\Big\} &\to \mathbb{R}^3\\
\sigma(x,y) =& (x,y,1-x-y)\\
F(\sigma(x,y)) =& (xy, y(1-x-y), x(1-x-y)) = (xy, y-xy-y^2, x-x^2-xy)\\
\sigma_x\wedge\sigma_y =& \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Cette normale est extérieure. En effet, Σ_2 étant la partie oblique du bord, on s'attend à ce que la normale extérieure s'éloigne de l'origine dans la direction des x, y, z positifs, i.e. on s'attend à ce que toutes ses composantes soient positives, ce qui est la cas ici. On peut aussi le coir sur le dessin :



Ainsi,

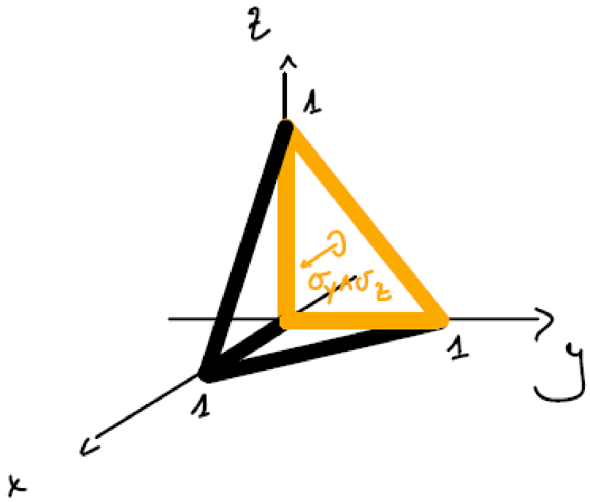
$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma_2}\langle F,\nu\rangle\, ds =& \int_0^1\int_0^{1-x}\Big\langle (xy, y-xy-y^2, x-x^2-xy),(1,1,1)\Big\rangle\, dydx\\
=& \int_0^1\int_0^{1-x} y+x-xy-y^2-x^2dydx\\
=& \int_0^1\left[\frac{1}{2}y^2+xy-\frac{1}{2}xy^2-\frac{1}{3}y^3-x^2y\right]_{y=0}^{y=1-x} dx\\
=& \int_0^1 \frac{1}{2}\left(1-2x+x^2\right)+x-x^2-\frac{1}{2}x\left(1-2x+x^2\right)\\
& \quad -\frac{1}{3}\left(1-3x+3x^2-x^3\right)-x^2+x^3dx\\
=& \int_0^1 \frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}x^2+x-x^2-\frac{1}{2}x+x^2-\frac{1}{2}x^3\\
& \quad -\frac{1}{3}+x-x^2+\frac{1}{3}x^3-x^2+x^3dx\\
=& \int_0^1 \frac{5}{6}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}dx\\
=& \frac{5}{24}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Passons à la partie du bord suivante :

$\boxed{\Sigma_3 :}$

$$\begin{aligned}\sigma\colon \Big\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 \ :\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1-y\Big\}\\ \sigma(y,z) =&(0,y,z)\\ F(\sigma(y,z)) =&(0,yz,0)\\ \sigma_y\wedge\sigma_z =&\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Cette normale est intérieure. Vu que cette partie du bord est vers l'arrière, on s'attend que la normale extérieure s'éloigne de l'origine dans la direction des x négatifs, i.e., on s'attend à ce que la première composante de la normale est négative. Ici, 1 est positif.

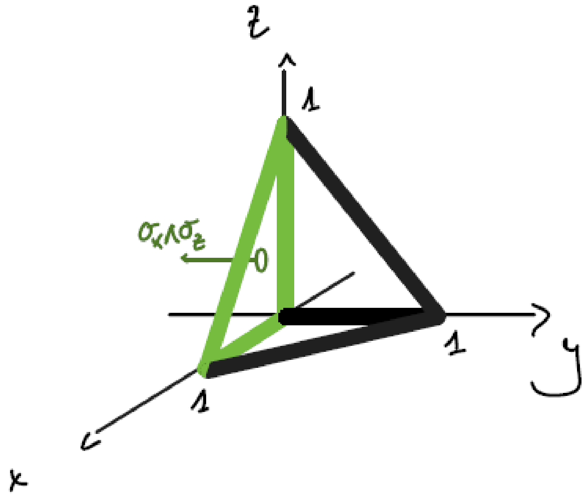


Ainsi,

$$\iint_{\Sigma_3} \langle F,\nu\rangle\, ds = -\int_0^1\int_0^{1-y} \langle (0,yz,0),(1,0,0)\rangle\, dzdy = 0$$

Passons à la dernière partie du bord :
$\boxed{\Sigma_4 :}$

$$\begin{aligned}\sigma\colon \Big\{(x,z)\in\mathbb{R}^2 \ :\ 0\le x\le 1,\ 0\le z\le 1-x\Big\}\to\mathbb{R}^3\\ \sigma(x,z) =&(x,0,y)\\ F(\sigma(x,z)) =&(0,0,xz)\\ \sigma_x\wedge\sigma_z =&\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$



Cett normale est extérieure. En effet, on s'attend à ce que la normale extérieure pointe dans la direction des y négatif, i.e. la deuxième composante doit être négative ce qui est le cas ici. Ainsi,

$$\iint_{\Sigma_4} \langle F, \nu \rangle \, ds = \int_0^1 \int_0^{1-x} \langle (0,0,xz), (0,-1,0) \rangle \, dz dx = 0$$

Pour finir

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, ds = & \iint_{\Sigma_1} \langle F, \nu \rangle \, ds + \iint_{\Sigma_2} \langle F, \nu \rangle \, ds + \iint_{\Sigma_3} \langle F, \nu \rangle \, ds + \iint_{\Sigma_4} \langle F, \nu \rangle \, ds \\ = & 0 + \frac{1}{8} + 0 + 0 = \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

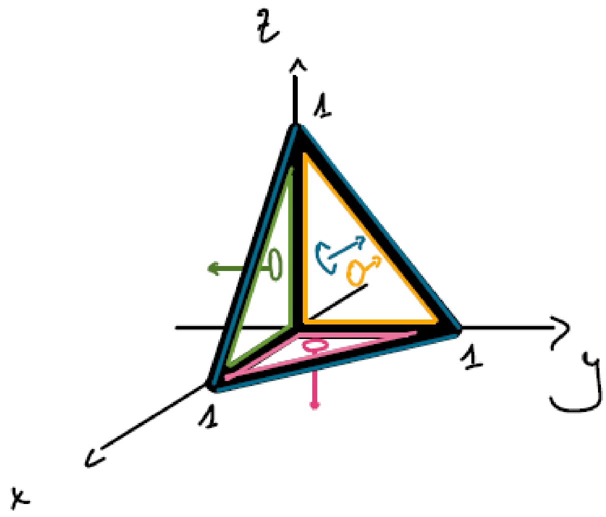
et on a bien obtenu le même résultat que dans le calcul de $\iiint_\Omega \operatorname{div} F(x,y,z) dx dy dz$.

Calcul $\iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, ds$**, Variante 2 :** On trouve les normales sur le dessin et on intègre des champs scalaires.
Comme dans la variante 1, le bord se sépare en 4 parties :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 0, \ 0 \le y \le 1-x, \ 0 \le x \le 1 \Big\} \\ \Sigma_2 &= \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 1-x-y, \ 0 \le y \le 1-x, \ 0 \le x \le 1 \Big\} \\ \Sigma_3 &= \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = 0, \ 0 \le y \le 1, \ 0 \le z \le 1-y \Big\} \\ \Sigma_4 &= \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y = 0, \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le z \le 1-x \Big\} \end{aligned}$$

Vu que ces 4 surfaces sont à des angles réguliers avec les axes, on peut [1] trouver à l'oeil les vecteurs normaux unité.

1. en tous cas pour les parties du bord qui sont dans le même plan que les axes. Pour Σ_2, faut avoir un peu l'habitude en géométrie.



Si ν_i est la normale extérieure unité sur Σ_i, on a

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= (0,0,-1)\\
\langle F, \nu_1\rangle &= -\,xz\\
\nu_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\\
\langle F, \nu_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\,(xy+yz+xz)\\
\nu_3 &= (-1,0,0)\\
\langle F, \nu_3\rangle &= -\,xy\\
\nu_4 &= (0,-1,0)\\
\langle F, \nu_4\rangle &= -\,yz
\end{aligned}$$

Remarquons que ces 4 vecteurs sont bien de longueur 1, ce qui est important vu qu'on veut la normale extérieure **unité**.
On reprend les paramétrisations de la variante 1 :
$\boxed{\Sigma_1 :}$

$$\begin{aligned}
\sigma \colon \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ :\ 0\le y\le 1-x,\ 0\le x\le 1\Big\} &\to \mathbb{R}^3\\
\sigma(x,y) =&(x,y,0)\\
\Big\langle F(\sigma(x,y)), \nu_{\sigma(x,y)}\Big\rangle =&0\\
\sigma_x\wedge\sigma_y =&\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\
\|\sigma_x\wedge\sigma_y\| =&1\\
\iint_{\Sigma_1}\langle F,\nu\rangle\, ds = \int_0^1\int_0^{1-x} 0\cdot 1 dzdx = 0
\end{aligned}$$

$\boxed{\Sigma_2 :}$

$$
\begin{aligned}
\sigma\colon \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ 0\le y\le 1-x,\ 0\le x\le 1\right\} &\to \mathbb{R}^3\\
\sigma(x,y) =&(x,y,1-x-y)\\
\left\langle F(\sigma(x,y)),\sigma_{\nu(x,y)}\right\rangle =&\frac{1}{\sqrt{3}}\left(xy+y-xy-y^2+x-x^2-xy\right)\\
=&\frac{1}{\sqrt{3}}\left(y+x-xy-y^2-x^2\right)\\
\sigma_x\wedge\sigma_y =&\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\\
\|\sigma_x\wedge\sigma_y\| =&\sqrt{3}\\
\iint_{\Sigma_2}\langle F,\nu\rangle\, ds =& \int_0^1\int_0^{1-x}\frac{1}{\sqrt{3}}\left(y+x-xy-y^2-x^2\right)\cdot\sqrt{3}dydx\\
=&\int_0^1\left[\frac{1}{2}y^2+xy-\frac{1}{2}xy^2-\frac{1}{3}y^3-x^2y\right]_{y=0}^{y=1-x}dx\\
=&\int_0^1\frac{1}{2}\left(1-2x+x^2\right)+x-x^2-\frac{1}{2}x\left(1-2x+x^2\right)\\
&-\frac{1}{3}\left(1-3x+3x^2-x^3\right)-x^2+x^3dx\\
=&\int_0^1\frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}x^2+x-x^2-\frac{1}{2}x+x^2-\frac{1}{2}x^3\\
&-\frac{1}{3}+x-x^2+\frac{1}{3}x^3-x^2+x^3dx\\
=&\int_0^1\frac{5}{6}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}dx\\
=&\frac{5}{24}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

(Remarquons que passé la deuxième égalité, les calculs sont exactements les mêmes que dans la variante 1. La simplification par $\sqrt{3}$ est exactement la simplification par $\|\sigma_u\wedge\sigma_v\|$ qu'on a vu dans le cours.)

$$
\begin{aligned}
\sigma\colon \left\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 \ : \ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1-y\right\} &\to \mathbb{R}^3\\
\sigma(y,z) =&(0,y,z)\\
\left\langle F(\sigma(y,z)),\nu_{\sigma(y,z)}\right\rangle =&0\\
\sigma_y\wedge\sigma_z =&\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\\
\|\sigma_y\wedge\sigma_z\| =&1\\
\iint_{\Sigma_3}\langle F,\nu\rangle\, ds =& \int_0^1\int_0^{1-y}0\cdot 1dzdy=0
\end{aligned}
$$

$\boxed{\Sigma_4:}$

$$
\begin{aligned}
\sigma\colon \Big\{(x,z)\in\mathbb{R}^2 \ :\ 0\le x\le 1,\ 0\le z\le 1-x\Big\} &\to \mathbb{R}^3\\
\sigma(x,z) =&(x,0,y)\\
\Big\langle F(\sigma(x,z)),\nu_{\sigma(x,z)}\Big\rangle =&0\\
\sigma_x\wedge\sigma_z =&\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\\
\|\sigma_x\wedge\sigma_z\| =&1\\
\iint_{\Sigma_4}\langle F,\nu\rangle\,ds = \int_0^1\int_0^{1-x} & 0\cdot 1dzdx = 0
\end{aligned}
$$

Pour finir

$$
\begin{aligned}
\iint_{\partial\Omega}\langle F,\nu\rangle\,ds =& \iint_{\Sigma_1}\langle F,\nu\rangle\,ds + \iint_{\Sigma_2}\langle F,\nu\rangle\,ds + \iint_{\Sigma_3}\langle F,\nu\rangle\,ds + \iint_{\Sigma_4}\langle F,\nu\rangle\,ds\\
=&0+\frac{1}{8}+0+0=\frac{1}{8},
\end{aligned}
$$

et on a bien obtenu le même résultat que dans le calcul de $\iiint_\Omega \operatorname{div} F(x,y,z)dxdydz$.

Exercice 2 (ex 6.6 p. 66, corrigé p. 74)**.**
Vérifier le théorème de la divergence pour $F(x,y,z)=(x,y,z)$ et

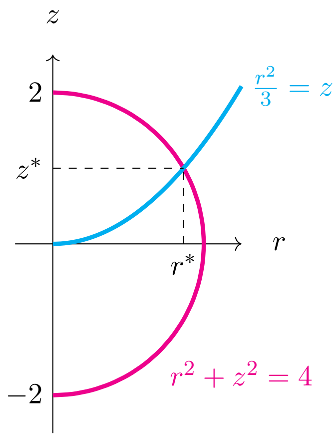
$$
\Omega = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2<4 \text{ et } x^2+y^2<3z\Big\}.
$$

Solution :
Calcul de $\operatorname{div} F$
On a

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) =&\frac{\partial}{\partial x}[x]=1\\
\frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) =&\frac{\partial}{\partial y}[y]=1\\
\frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z) =&\frac{\partial}{\partial z}[z]=1\\
\operatorname{div} F(x,y,z) =&3
\end{aligned}
$$

Calcul $\iiint_\Omega \operatorname{div} F(x,y,z)dxdydz$**, Variante 1** : Coordonnées cylindriques.
On passe en coordonnées polaires $(x,y,z)=(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$, $r\ge 0$, $\theta\in[0,2\pi]$, $z\in\mathbb{R}$. Nos conditions deviennent

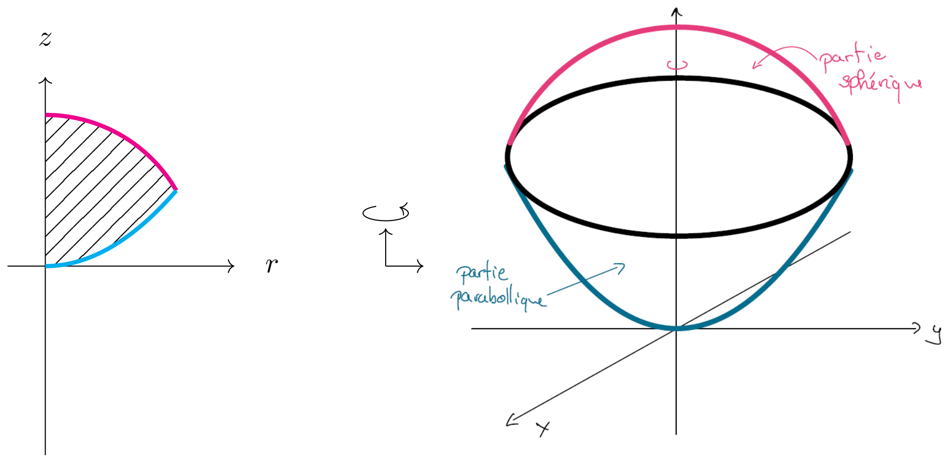
$$
\begin{aligned}
x^2+y^2+z^2<4 \quad&\Leftrightarrow\quad r^2+z^2<4\\
x^2+y^2<3z \quad&\Leftrightarrow \frac{r^2}{3}<z.
\end{aligned}
$$



On trouve les coordonnées du point (r^*, z^*) en résolvant le système

$$\begin{cases} r^2 + z^2 = 4 \\ r^2 = 3z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z^2 + 3z - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = -4, 1$$

Vu que $z^* > 0$ on déduit $z^* = 1$ et $r^* = \sqrt{4 - (z^*)^2} = \sqrt{3}$.
Ainsi, notre domaine est



Ainsi, une paramétrisation du domaine z simple est

$$\Omega = \left\{ (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \theta \in [0, 2\pi], \ r \in \left[0, \sqrt{3}\right], \ \frac{r^2}{3} \leq z \leq \sqrt{r^2 - 4} \right\}$$

Alternativement, on peut découper le domaine en deux parties r simples

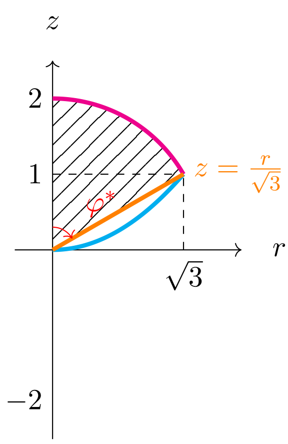
$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \left\{ (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \theta \in [0, 2\pi], \ z \in [0, 1], \ 0 \leq r \leq \sqrt{3z} \right\} \\ \Omega_2 &= \left\{ (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \theta \in [0, 2\pi], \ z \in [1, 2], \ 0 \leq r \leq \sqrt{4 - z^2} \right\} \\ \Omega &= \Omega_1 \cup \Omega_2 \end{aligned}$$

mais on ne présente pas les calculs dans ce cas, on présente uniquement les calculs dans le cas z-simple.

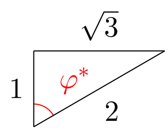
Vu que le jacobien des coordonnées cylindriques est r, on a

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega \operatorname{div} F dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} 3r dz dr d\theta \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} 3\sqrt{4-r^2}r - r^3 dr \\
&= 2\pi \left[-(4-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}r^4 \right]_{r=0}^{r=\sqrt{3}} \\
&= 2\pi \left(-(4-3)^{\frac{3}{2}} - \frac{9}{4} + 4^{\frac{3}{2}} \right) \\
&= 2\pi \left(-1 - \frac{9}{4} + 8 \right) \\
&= \frac{19\pi}{2}
\end{aligned}$$

Calcul $\iiint_\Omega \operatorname{div} F(x,y,z)dxdydz$**, Variante 2** : Mi-sphérique, mi-cylindrique.
En découpant le domaine de la sorte :



la partie hachurée peut être paramétrée en coordonnées sphériques. On trouve d'abord l'angle φ^* en faisant un peu de trigonométrie [2].



$$\cos\varphi^* = \frac{1}{2} \qquad \sin\varphi^* = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan\varphi^* = \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \varphi^* = \frac{\pi}{3}.$$

Ainsi, on a $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \left\{ (r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \theta \in [0,2\pi],\ r \in [0,2],\ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \right\} \\
\Omega_2 &= \left\{ (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \theta \in [0,2\pi],\ r \in \left[0,\sqrt{3}\right],\ \frac{r^2}{3} \le z \le \frac{r}{\sqrt{3}} \right\} \\
&= \left\{ (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \theta \in [0,2\pi],\ z \in [0,1],\ \sqrt{3}z \le r \le \sqrt{3z} \right\}
\end{aligned}$$

2. pour un rappel sur les angles trigonométriques à connaître, voir : `https://sma.epfl.ch/~struett/analyse1/main_proofs_at_the_end.pdf#theorem.0.50`

Vu que le jacobien des coordonnées sphériques est $r^2 \sin\varphi$, on a

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega_1} \operatorname{div} F(x,y,z)dxdydz =& \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{3}} 3r^2\sin\varphi d\varphi dr d\theta\\ =&2\pi\left[r^3\right]_{r=0}^{r=2}\left[-\cos\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{3}}\\ =&16\pi\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\\ =&16\pi\left(1-\frac{1}{2}\right)=8\pi\end{aligned}$$

et vu que le jacobien des coordonnées cylindriques est r, on a (en utilisant la première paramétrisation z-simple)

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega_2} \operatorname{div} F(x,y,z)dxdydz =& \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_{\frac{r^2}{3}}^{\frac{r}{\sqrt{3}}} 3rdzdrd\theta\\ =&2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{3}r^2-r^3dr\\ =&2\pi\left[\frac{r^3}{\sqrt{3}}-\frac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{r=\sqrt{3}}\\ =& 2\pi\left(3-\frac{9}{4}\right)\\ =& \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

ou, en utilisant le deuxième paramétrisation r-simple

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega_2} \operatorname{div} F(x,y,z)dxdydz =& \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\sqrt{3z}}^{\sqrt{3z}} 3rdrzd\theta\\ =&2\pi\int_0^1\left[\frac{3r^2}{2}\right]_{r=\sqrt{3}z}^{r=\sqrt{3z}}dr\\ =&2\pi\int_0^1\frac{9z}{2}-\frac{9z^2}{2}dz\\ =&2\pi\left(\frac{9}{4}-\frac{3}{2}\right)\\ =&\frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

Pour finir,

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega_1} \operatorname{div} F(x,y,z)dxdydz + \iiint_{\Omega_2} \operatorname{div} F(x,y,z)dxdydz = 8\pi+\frac{3\pi}{2}=\frac{19\pi}{2}$$

Calcul $\iint_{\partial\Omega}\langle F,\nu\rangle\, ds$**, Variante 1** : cylindrique, z est une fonction de r.
Le bord de Ω se décompose en 2 parties. La partie sphérique Σ_1 quand $z=\sqrt{4-r^2}$ et la partie parabollique Σ_2 quand $z=\frac{r^2}{3}$.

$$\Sigma_1 = \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\in\mathbb{R}^3 \ :\ \theta\in[0,2\pi],\ r\in\left[0,\sqrt{3}\right],\ z=\sqrt{4-r^2}\right\}$$
$$\Sigma_2 = \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\in\mathbb{R}^3 \ :\ \theta\in[0,2\pi],\ r\in\left[0,\sqrt{3}\right],\ z=\frac{r^2}{3}\right\}$$

Ainsi,

$\boxed{\Sigma_1 :}$

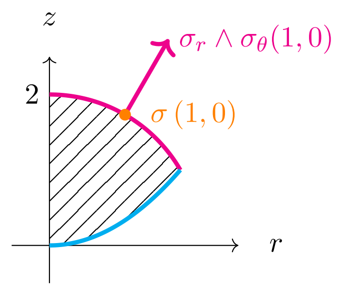
$$
\begin{aligned}
\sigma \colon \left[0, \sqrt{3}\right] \times [0, 2\pi] &\to \mathbb{R}^3 \\
\sigma(r, \theta) &= \left(r \cos\theta, r \sin\theta, \sqrt{4 - r^2}\right) \\
F(\sigma(r, \theta)) &= \left(r \cos\theta, r \sin\theta, \sqrt{4 - r^2}\right) \\
\sigma_r \wedge \sigma_\theta &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & -\frac{r}{\sqrt{4-r^2}} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r^2 \cos\theta}{\sqrt{4-r^2}} \\ \frac{r^2 \sin\theta}{\sqrt{4-r^2}} \\ r \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Cette normale est extérieure. En effet, la partie sphérique étant la partie du haut de notre domaine, la normal extérieure pointe vers le haut, i.e. sa troisième composante doit être positive. On peut aussi tester la normale en $\theta = 0$ et $r = 1$. On a alors

$$
\begin{aligned}
\sigma\,(1, 0) &= \left(1, 0, \sqrt{3}\right) \\
\sigma_r \wedge \sigma_\theta\,(1, 0) &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 1\right).
\end{aligned}
$$

Sur le dessin, ça donne

$\boxed{\text{dans le plan } \theta = 0, \text{ i.e. dans le plan } y = 0,\ x \geq 0}$



Ainsi,

$$
\begin{aligned}
\iint_{\Sigma_1} \langle F, \nu \rangle \, ds &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \left\langle \left(r\cos\theta, r\sin\theta, \sqrt{4-r^2}\right), \left(\frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{4-r^2}}, \frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{4-r^2}}, r\right) \right\rangle drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{r^3\cos^2\theta}{\sqrt{4-r^2}} + \frac{r^3\sin^2\theta}{\sqrt{4-r^2}} + r\sqrt{4-r^2} drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{r^3}{\sqrt{4-r^2}} + r\sqrt{4-r^2} drd\theta \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{r^3}{\sqrt{4-r^2}} + r\sqrt{4-r^2} dr
\end{aligned}
$$

Or,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{3}} \frac{r^3}{\sqrt{4-r^2}}dr =& \int_0^{\sqrt{3}} r^2 \frac{r}{\sqrt{4-r^2}}dr \\
\overset{\text{IPP}}{=}& \left[-r^2\sqrt{4-r^2}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} -2r\sqrt{4-r^2}dr \qquad \left| \begin{array}{ll} u=r^2 & v=-\sqrt{4-r^2} \\ u'=2r & v'=\frac{r}{\sqrt{4-r^2}} \end{array} \right. \\
=& -3+2\int_0^{\sqrt{3}} r\sqrt{4-r^2}dr \\
=& -3+2\left[-\frac{1}{3}\left(4-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{3}} \\
=& -3+2\left(-\frac{1}{3}+\frac{8}{3}\right) \\
=& \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma_1} \langle F,\nu\rangle\, ds =& \frac{10\pi}{3} + 2\pi\left[-\frac{1}{3}\left(4-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{3}} \\
=& \frac{10\pi}{3} + 2\pi\left(-\frac{1}{3}+\frac{8}{3}\right) \\
=& 8\pi
\end{aligned}$$

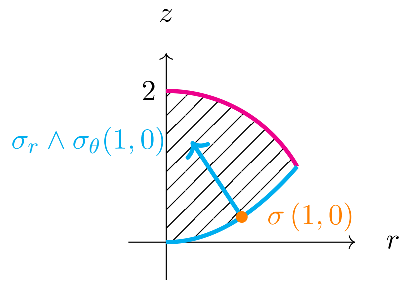
Et pour l'autre partie du bord :
$\boxed{\Sigma_2 :}$

$$\begin{aligned}
\sigma\colon \left[0,\sqrt{3}\right] \times [0,2\pi] &\to \mathbb{R}^3 \\
\sigma(r,\theta) &= \left(r\cos\theta, r\sin\theta, \frac{r^2}{3}\right) \\
F(\sigma(r,\theta)) &= \left(r\cos\theta, r\sin\theta, \frac{r^2}{3}\right) \\
\sigma_r \wedge \sigma_\theta &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & \frac{2}{3}r \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}r^2\cos\theta \\ -\frac{2}{3}r^2\sin\theta \\ r \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Cette normale est intérieure. En effet, vu que Σ_2 est la partie du bas du bord de notre domaine, on s'attend à ce que la normale extérieure pointe vers le bas, c'est-à-dire, la troisième composante de la normale estérieure est négative. Ici, r est positif. On peut également tester cette normale sur le dessin en $\theta = 0$, $r = 1$.
On a

$$\begin{aligned}
\sigma(1,0) &= \left(1,0,\frac{1}{3}\right) \\
\sigma_r \wedge \sigma_\theta(1,0) &= \left(-\frac{2}{3},0,1\right)
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{dans le plan } \theta = 0, \text{ i.e. dans le plan } y = 0,\ x \geq 0}$



Ainsi,

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma_2} \langle F, \nu \rangle \, ds &= -\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \left\langle \left(r\cos\theta, r\sin\theta, \frac{r^2}{3} \right), \left(-\frac{2}{3} r^2 \cos\theta, -\frac{2}{3} r^2 \sin\theta, r \right) \right\rangle dr d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} -\frac{2}{3} r^3 + \frac{1}{3} r^3 dr d\theta \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{3} r^3 dr \\
&= 2\pi \left[\frac{1}{12} r^4 \right]_{r=0}^{r=\sqrt{3}} \\
&= \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

Pour finir,

$$\iint \partial\Omega \, \langle F, \nu \rangle \, ds = \iint_{\Sigma_1} \langle F, \nu \rangle \, ds + \iint_{\Sigma_2} \langle F, \nu \rangle \, ds = 8\pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{19\pi}{2},$$

qui est bien la même chose que $\iiint_\Omega \operatorname{div} F(x, y, z) dx dy dz$.

Calcul $\iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, ds$**, Variante 2** : cylindrique, r est une fonction de z.

Comme dans la variante 1, le bord de Ω se décompose en 2 parties. La partie sphérique Σ_1 quand $r = \sqrt{4 - z^2}$ et la partie parabollique Σ_2 quand $r = \sqrt{3z}$.

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \left\{ (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \theta \in [0, 2\pi],\ z \in [1, 2]\,,\ r = \sqrt{4 - z^2} \right\} \\
\Sigma_2 &= \left\{ (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \theta \in [0, 2\pi],\ z \in [0, 1]\,,\ r = \sqrt{3z} \right\}
\end{aligned}$$

(Remarque : on peut mélanger les paramétrisations de la variante 1 et 2 sans soucis)s

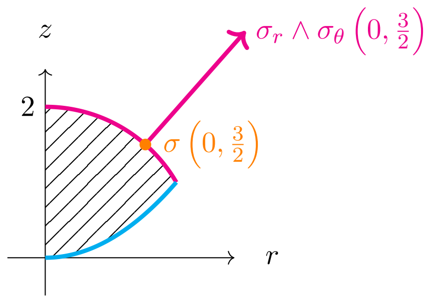
$\boxed{\Sigma_1 :}$

$$\begin{aligned}
\sigma \colon [0, 2\pi] \times [1, 2] &\to \mathbb{R}^3 \\
\sigma(\theta, z) &= \left(\sqrt{4 - z^2} \cos\theta, \sqrt{4 - z^2} \sin\theta, z \right) \\
F(\sigma(\theta, z)) &= \left(\sqrt{4 - z^2} \cos\theta, \sqrt{4 - z^2} \sin\theta, z \right) \\
\sigma_\theta \wedge \sigma_z &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sqrt{4 - z^2} \sin\theta & \sqrt{4 - z^2} \cos\theta & 0 \\ -\frac{z}{\sqrt{4 - z^2}} \cos\theta & -\frac{z}{\sqrt{4 - z^2}} \sin\theta & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{4 - z^2} \cos\theta \\ \sqrt{4 - z^2} \sin\theta \\ z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Cette normale est extérieure. En effet, la partie sphérique étant la partie du haut de notre domaine, la normal extérieure pointe vers le haut, i.e. sa troisième composante doit être positive. Vu que $z \in [1, 2]$, la troisième composante, z est positive. On peut aussi tester la normale en $\theta = 0$ et $z = \frac{3}{2}$. On a alors

$$\sigma\left(0, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{3}{4}\right)$$
$$\sigma_\theta \wedge \sigma_z\left(0, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{3}{4}\right)$$

$\boxed{\text{dans le plan } \theta = 0\text{, i.e. dans le plan } y = 0,\ x \geq 0}$



Ainsi,

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma_1} \langle F, \nu \rangle \, ds &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \left\langle \left(\sqrt{4 - z^2}\cos\theta, \sqrt{4 - z^2}\sin\theta, z\right), \left(\sqrt{4 - z^2}\cos\theta, \sqrt{4 - z^2}\sin\theta, z\right) \right\rangle dz d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \left(4 - z^2\right)\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + z^2 dz d\theta \\
&= 2\pi \int_1^2 4 dz \\
&= 8\pi
\end{aligned}$$

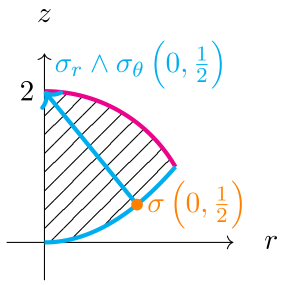
Passons à la deuxième partie :
$\boxed{\Sigma_2 :}$

$$\sigma \colon [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3$$
$$\sigma(\theta, z) = \left(\sqrt{3z}\cos\theta, \sqrt{3z}\sin\theta, z\right)$$
$$F(\sigma(\theta, z)) = \left(\sqrt{3z}\cos\theta, \sqrt{3z}\sin\theta, z\right)$$
$$\sigma_\theta \wedge \sigma_z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sqrt{3z}\sin\theta & \sqrt{3z}\cos\theta & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{z}}\cos\theta & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{z}}\sin\theta & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3z}\cos\theta \\ -\sqrt{3z}\sin\theta \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Cette normale est intérieure. En effet, vu que Σ_2 est la partie du bas de notre domaine, on s'attend à ce que la normale extérieure pointe vers le bas, i.e. on s'attend à ce que la troisième composante de la normale est négative. Ici, vu que $z \in [0, 1]$, la troisième composante z est positive. On peut aussi la tester en $\theta = 0$, $z = \frac{1}{2}$. On a

$$\sigma\left(0, \frac{1}{2}\right) = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, \frac{1}{2}\right)$$
$$\sigma_\theta \wedge \sigma_z\left(0, \frac{3}{2}\right) = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, \frac{3}{2}\right)$$

$\boxed{\text{dans le plan } \theta = 0, \text{ i.e. dans le plan } y = 0,\ x \geq 0}$



Ainsi,

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma_2} \langle F, \nu \rangle \, ds = & - \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\langle \left(\sqrt{3z}\cos\theta, \sqrt{3z}\sin\theta, z\right), \left(-\sqrt{3z}\cos\theta, -\sqrt{3z}\sin\theta, \frac{3}{2}\right) \right\rangle drd\theta \\
=& 2\pi \int_0^1 3z - \frac{3}{2} z dz \\
=& \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

On conclut

$$\int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, ds = \iint_{\Sigma_1} \langle F, \nu \rangle \, ds + \iint_{\Sigma_2} \langle F, \nu \rangle \, ds = 8\pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{19\pi}{2},$$

qui est bien le même résultat que ce qu'on a trouvé quand on a calculé $\iiint_\Omega \operatorname{div} F(x, y, z) dxdydz$

Calcul $\iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, ds$**, Variante 3** :Mi-sphérique, mi-cylindrique.

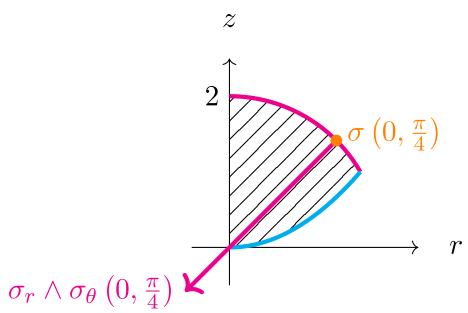
Pour Σ_2, on calcule $\iint_{\Sigma_2} \langle F, \nu \rangle \, ds = \frac{3\pi}{2}$ en coordonnées cylindriques comme dans les variantes 1 et 2.
Pour Σ_1 on peut également le faire en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 =& \left\{ (r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \theta \in [0, 2\pi],\ r = 2,\ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \right\} \\
\sigma \colon & [0, 2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}^3 \\
\sigma(\theta, \varphi) =& (2\cos\theta\sin\varphi, 2\sin\theta\sin\varphi, 2\cos\varphi) \\
F(\sigma(\theta, \varphi)) =& (2\cos\theta\sin\varphi, 2\sin\theta\sin\varphi, 2\cos\varphi) \\
\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi =& \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2\sin\theta\sin\varphi & 2\cos\theta\sin\varphi & 0 \\ 2\cos\theta\cos\varphi & 2\sin\theta\cos\varphi & -2\sin\varphi \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -4\cos\theta\sin^2\varphi \\ -4\sin\theta\sin^2\varphi \\ -4\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Cette normale est intérieure. Vu que Σ_1 est la partie du dessus, on s'attend à ce que sa troisième composante soit positivee. Ici, $-4\sin\varphi\cos\varphi \leq 0$. On la teste en $\theta = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$. On a $(\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2})$

$$\begin{aligned}
\sigma\left(0, \frac{\pi}{4}\right) =& \left(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right) \\
\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi =& (-2, 0, -2)
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{dans le plan } \theta = 0, \text{ i.e. dans le plan } y = 0,\ x \geq 0}$



Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma_1} \langle F, \nu \rangle \, ds \\
=& -\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \Big\langle (2\cos\theta \sin\varphi, 2\sin\theta\sin\varphi, 2\cos\varphi), \left(-4\cos\theta\sin^2\varphi, -4\sin\theta\sin^2\varphi, -4\sin\varphi\cos\varphi\right) \Big\rangle \, d\varphi d\theta \\
=& \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} 8\sin^3\varphi + 8\sin\varphi\cos^2\varphi d\theta d\varphi \\
=& 16\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\varphi \left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) d\varphi \\
=& 16\pi \left[-\cos\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{3}} \\
=& 16\pi \left(-\frac{1}{2} + 1\right) \\
=& 8\pi.
\end{aligned}$$

Exercice 3 (ex 6.9 p. 67, corrigé p. 76)**.**
Vérifier le théorème de la divergence pour $F(x, y, z) = (2, 0, xy^2 + z^2)$ et

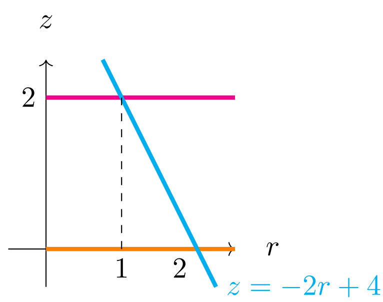
$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0,\ 0 < z < 2 \text{ et } 4\left(x^2 + y^2\right) < (z-4)^2\right\}.$$

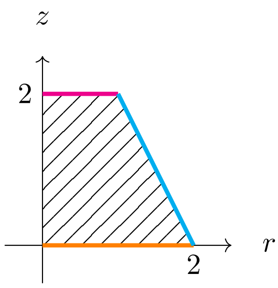
Solution :
Calcul de $\operatorname{div} F$
On a

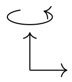
$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, z) =& \frac{\partial}{\partial x}[2] = 0 \\
\frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, z) =& \frac{\partial}{\partial y}[0] = 0 \\
\frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z) =& \frac{\partial}{\partial z}\left[xy^2 + z^2\right] = 2z \\
\operatorname{div} F(x, y, z) =& 2z
\end{aligned}$$

Calcul de $\iint_\Omega \operatorname{div} F(x, y, z) dx dy dz$**, Variante 1** : Coordonnées cylindriques r-simples.
On repère la symétrie cylindrique et on passe dans les coordonnées correspondantes : $(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$, $r \geq 0$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, $z \in \mathbb{R}$. Nos conditions deviennent

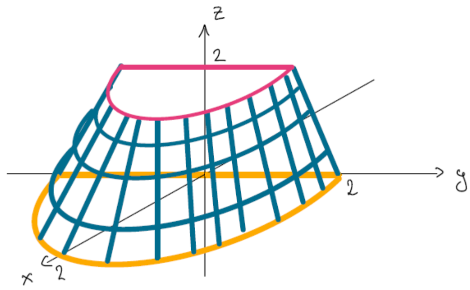
$$\begin{aligned}
x > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad r\cos\theta > 0 \quad \Leftrightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\
0 < z < 2 \quad & \quad \text{change pas} \\
4(x^2 + y^2) < (z-4)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 4r^2 < (z-4)^2 \quad \overset{z \in [0,2]}{\Leftrightarrow} \quad 2r < 4 - z \quad \Leftrightarrow \quad z < -2r + 4
\end{aligned}$$

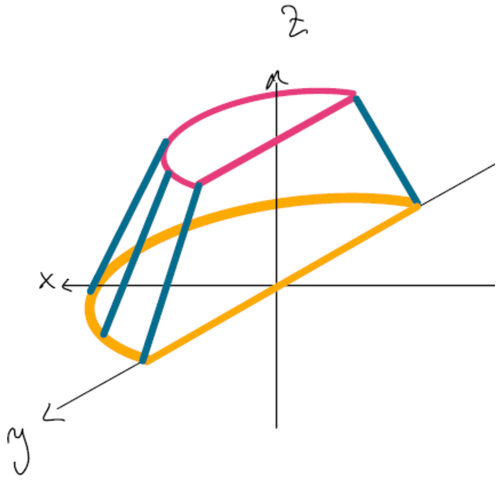






Attention ! $x > 0$ et θ ne parcourt que $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$





Ainsi, notre domaine se paramétrise avec

$$\Omega = \left\{ (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \ z \in [0,2], \ 0 \leq r \leq \frac{4-z}{2} \right\}$$

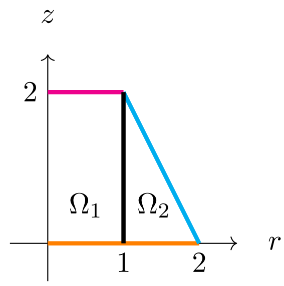
Vu que le jacobien des coordonnées cylindriques est r, on arrive à

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega \operatorname{div} F(x,y,z) dxdydz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^{\frac{4-z}{2}} 2zr \ drdzd\theta \\
&= \pi \int_0^2 z \left[r^2\right]_{r=0}^{r=\frac{4-z}{2}} dz \\
&= \pi \int_0^2 4z - 2z^2 + \frac{z^3}{4} dz \\
&= \pi \left[2z^2 - \frac{2}{3}z^3 + \frac{1}{16}z^2\right]_{z=0}^{z=2} \\
&= \pi \left(8 - \frac{16}{3} + 1\right) \\
&= \frac{11\pi}{3}
\end{aligned}$$

Calcul de $\iint_\Omega \operatorname{div} F(x,y,z) dxdydz$**, Variante 2** : Coordonnées cylindriques, découpage z-simple.

On a $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ avec

$$\Omega_1 = \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \theta \in [0, 2\pi],\ r \in [0,1],\ z \in [0,2]\right\}$$
$$\Omega_2 = \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \theta \in [0, 2\pi],\ r \in [1,2],\ 0 \le z \le 4-2r\right\}$$



Ainsi, en utilisant que le jacobien des coordonnées cylindriques est r, on calcule

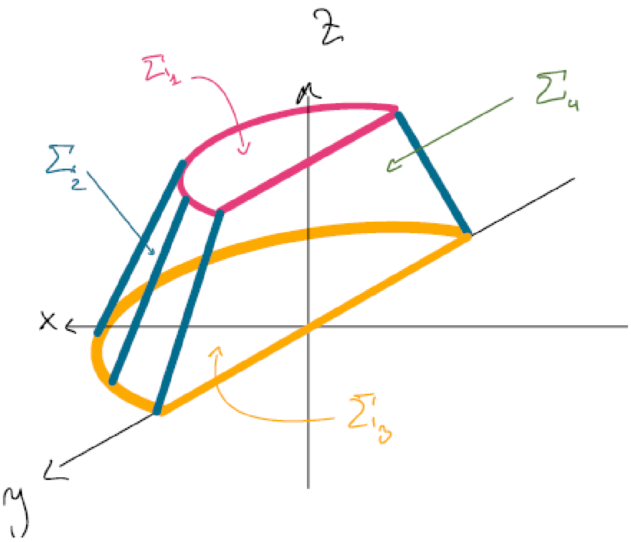
$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega_1} \operatorname{div} F(x,y,z) dxdydz =& \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^2 2zr \ dzdrd\theta \\
=& 2\pi \left[\frac{1}{2} r^2\right]_{r=0}^{r=1} \left[\frac{1}{2} z^2\right]_{z=0}^{z=2} \\
=& 2\pi \\
\iiint_{\Omega_2} \operatorname{div} F(x,y,z) dxdydz =& \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \int_0^{4-2r} 2zr \ dzdrd\theta \\
=& \pi \int_1^2 r\left(4-2r\right)^2 dr \\
=& \pi \int_1^2 16r - 16r^2 + 4r^3 dr \\
=& \pi \left[8r^2 - \frac{16}{3} r^3 + r^4\right]_{r=1}^{r=2} \\
=& \pi \left(8 \cdot 3 - \frac{16}{3} \cdot 7 + 15\right) \\
=& \pi \frac{72 - 112 + 45}{3} \\
=& \frac{5\pi}{3}.
\end{aligned}$$

et donc, on conclut

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F(x,y,z) dxdydz = \iiint_{\Omega_1} \operatorname{div} F(x,y,z) dxdydz + \iiint_{\Omega_2} \operatorname{div} F(x,y,z) dxdydz = 2\pi + \frac{5\pi}{3} = \frac{11\pi}{3}$$

Calcul de $\iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu\rangle \, ds$

Le bord de Ω de sépare en 4 parties : Le courvercle plat, Σ_1, lorsque $z = 2$, La partie cônique Σ_2 lorsque $r = \frac{4-z}{2}$, le socle Σ_3 lorsque $z = 0$ et le dos, Σ_4 losque $x = 0$ (ou alternativement, lorsque $\theta = -\pi/$ et $\theta = \pi/2$.



$$\Sigma_1 = \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\; r \in [0,1],\; z = 2\right\}$$

$$\Sigma_2 = \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\; r \in [1,2],\; z = 4-2r\right\}$$

$$= \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\; z \in [0,2],\; r = \frac{4-z}{2}\right\}$$

$$\Sigma_3 = \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\; r \in [0,2],\; z = 0\right\}$$

$$\Sigma_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x = 0,\; z \in [0,2],\; -\frac{4-z}{2} \le y \le \frac{4-z}{2}\right\}$$

$\boxed{\Sigma_1 :}$

$$\sigma \colon [0,1] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3$$

$$\sigma(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 2)$$

$$F(\sigma(r,\theta)) = \left(2, 0, r^3\cos\theta\sin^2\theta + 4\right)$$

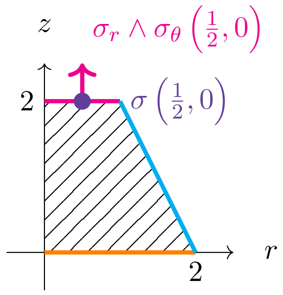
$$\sigma_r \wedge \sigma_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

Cette normale est extérieure. En effet, vu que Σ_1 est le couvercle de notre domaine, on s'attend à ce que la normale extérieure pointe vers le haut, i.e. la troisième composante de la normale est positive. On peut également la tester en $\theta = 0$, $r = \frac{1}{2}$. On a

$$\sigma\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, 2\right)$$

$$\sigma_r \wedge \sigma_\theta\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\text{dans le plan } \theta = 0, \text{ i.e. dans le plan } y = 0,\ x \geq 0}$$



Ainsi,

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma_1} \langle F, \nu \rangle \, ds &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \left\langle \left(2, 0, r^3 \cos\theta \sin^2\theta + 4\right), (0, 0, r) \right\rangle drd\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^4 \cos\theta \sin^2\theta + 4r \; drd\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5} \cos\theta \sin^2\theta + 2d\theta \\
&= \frac{1}{5} \left[\frac{1}{3} \sin^3\theta\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} + 2\pi \\
&= \frac{2}{15} + 2\pi
\end{aligned}$$

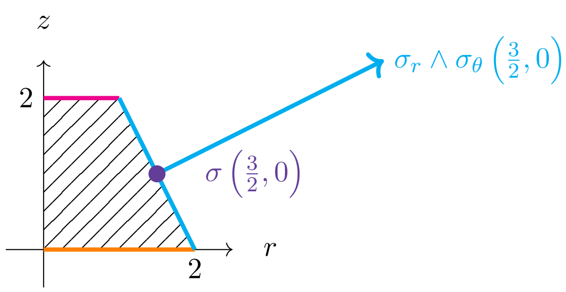
$\boxed{\Sigma_2 :}$ <u>*Variante 1*</u> : z est une fonction de r.

$$\begin{aligned}
\sigma \colon [1, 2] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\to \mathbb{R}^3 \\
\sigma(r, \theta) &= (r\cos\theta, r\sin\theta, 4 - 2r) \\
F(\sigma(r, \theta)) &= \left(2, 0, r^3 \cos\theta \sin^2\theta + 16 - 16r + 4r^2\right) \\
\sigma_r \wedge \sigma_\theta &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & -2 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2r\cos\theta \\ 2r\sin\theta \\ r \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Cette normale est extérieure. En effet, au vu de l'inclinaison de Σ_2, on s'attend à ce que la normale extérieure pointe vers le haut, i.e. la troisième composante de la normale est positive. On peut également la tester en $\theta = 0$, $r = \frac{3}{2}$. On a

$$\begin{aligned}
\sigma\left(\frac{3}{2}, 0\right) &= \left(\frac{3}{2}, 0, 1\right) \\
\sigma_r \wedge \sigma_\theta \left(\frac{3}{2}, 0\right) &= \left(3, 0, \frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{dans le plan } \theta = 0, \text{ i.e. dans le plan } y = 0,\ x \geq 0}$$



Ainsi,

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma_2} \langle F,\nu\rangle\, ds &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 \left\langle \left(2,0,r^3\cos\theta\sin^2\theta+16-16r+4r^2\right),(2r\cos\theta,2r\sin\theta,r)\right\rangle drd\theta\\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 4r\cos\theta+r^4\cos\theta\sin^2\theta+16r-16r^2+4r^3\ drd\theta\\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[2r^2\cos\theta+\frac{1}{5}r^5\cos\theta\sin^2\theta+8r^2-\frac{16}{3}r^3+r^4\right]_{r=1}^{r=2} d\theta\\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 6\cos\theta+\frac{31}{5}\cos\theta\sin^2\theta+8(4-1)-\frac{16}{3}(8-1)+16-1d\theta\\
&= \left[6\sin\theta+\frac{31}{15}\sin^3\theta\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}+\pi\left(24-\frac{112}{3}+15\right)\\
&=12+\frac{62}{15}+\frac{5\pi}{3}\\
&=16+\frac{2}{15}+\frac{5\pi}{3}
\end{aligned}$$

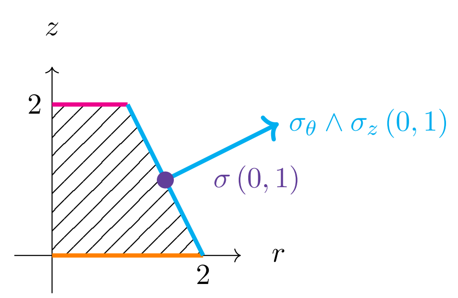
$\boxed{\Sigma_2:}$ *Variante 2* : r est une fonction de z.

$$\begin{aligned}
\sigma\colon \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\times[0,2] &\to \mathbb{R}^3\\
\sigma(\theta,z) &= \left(\frac{4-z}{2}\cos\theta,\frac{4-z}{2}\sin\theta,z\right)\\
F(\sigma(\theta,z)) &= \left(2,0,\left(\frac{4-z}{2}\right)^3\cos\theta\sin^2\theta+z^2\right)\\
\sigma_\theta\wedge\sigma_z &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ -\frac{4-z}{2}\sin\theta & \frac{4-z}{2}\cos\theta & 0\\ -\frac{1}{2}\cos\theta & -\frac{1}{2}\sin\theta & 1\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{4-z}{2}\cos\theta\\ \frac{4-z}{2}\sin\theta\\ \frac{4-z}{4}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Cette normale est extérieure. En effet, au vu de l'inclinaison de Σ_2, on s'attend à ce que la normale extérieure pointe vers le haut, i.e. la troisième composante de la normale est positive. On peut également la tester en $\theta=0$, $z=1$. On a

$$\begin{aligned}
\sigma(0,1) &= \left(\frac{3}{2},0,1\right)\\
\sigma_r\wedge\sigma_\theta(0,1) &= \left(\frac{3}{2},0,\frac{3}{4}\right)
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{dans le plan } \theta=0,\text{ i.e. dans le plan } y=0,\ x\geq 0}$



Ainsi,

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma_2} \langle F,\nu\rangle\, ds &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \left\langle \left(2, 0, \left(\frac{4-z}{2}\right)^3 \cos\theta \sin^2\theta + z^2\right), \left(\frac{4-z}{2}\cos\theta, \frac{4-z}{2}\sin\theta, \frac{4-z}{4}\right)\right\rangle dz d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 (4-z)\cos\theta + \frac{1}{2^5}(4-z)^4 \cos\theta \sin^2\theta + z^2 - \frac{1}{4} z^3 dz d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(4z - \frac{1}{2}z^2\right)\cos\theta - \frac{1}{2^5\cdot 5}(4-z)^5 \cos\theta\sin^2\theta + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2^5} z^4\right]_{z=0}^{z=2} d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (8-2)\cos\theta - \frac{2^5-4^5}{2^5\cdot 5}\cos\theta\sin^2\theta + \frac{8}{3} - 1 d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 6\cos\theta + \frac{2^5-1}{5}\cos\theta\sin^2\theta + \frac{5}{3} d\theta \\
&= \left[6\sin\theta + \frac{31}{15}\sin^3\theta\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} + \frac{5\pi}{3} \\
&= 12 + \frac{62}{15} + \frac{5\pi}{3} \\
&= 16 + \frac{2}{15} + \frac{5\pi}{3}
\end{aligned}$$

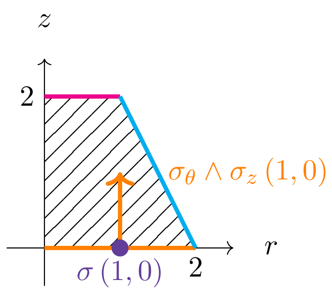
$\boxed{\Sigma_3 :}$

$$\begin{aligned}
\sigma\colon [0,2]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] &\to \mathbb{R}^3 \\
\sigma(r,\theta) &= (r\cos\theta, r\sin\theta, 0) \\
F(\sigma(r,\theta)) &= \left(2, 0, r^3\cos\theta\sin^2\theta\right) \\
\sigma_r \wedge \sigma_\theta &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Cette normale est intérieure. En effet, vu que Σ_3 est la partie du bas, on s'attend à ce que la normale extérieure pointe vers le bas, i.i la troisième composante de la normale doit être négative. Ici, r est positif. On peut aussi la tester en $\theta = 0$ et $r = 1$. On a

$$\begin{aligned}
\sigma(1,0) &= (1,0,0) \\
\sigma_r \wedge \sigma_\theta(1,0) &= (0,0,1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{dans le plan } \theta = 0, \text{ i.e. dans le plan } y = 0,\ x \geq 0}$$



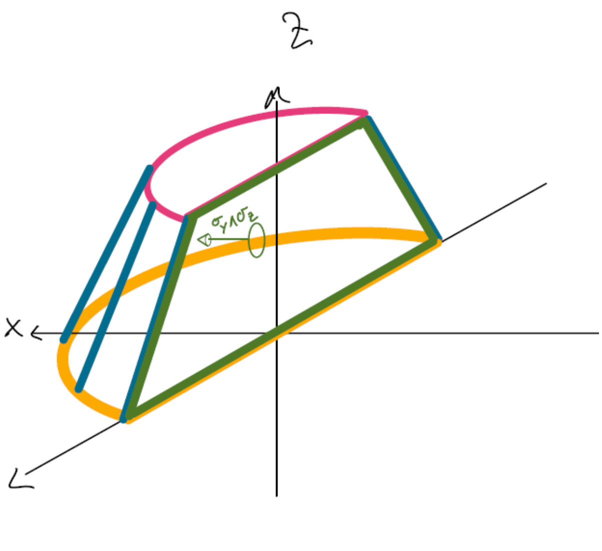
Ainsi,

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma_3} \langle F, \nu \rangle \, ds &= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \left\langle \left(2, 0, r^3 \cos\theta \sin^2\theta\right), (0,0,r) \right\rangle drd\theta \\
&= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^4 \cos\theta \sin^2\theta \; drd\theta \\
&= -\left[\frac{1}{5} r^5\right]_{r=0}^{r=2} \left[\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{64}{15}
\end{aligned}$$

$\boxed{\Sigma_4 :}$: _Variante 1_ : coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned}
\sigma \colon \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ z \in [0,2], \ -\frac{4-z}{2} \leq y \leq \frac{4-z}{2}\right\} &\to \mathbb{R}^3 \\
\sigma(y,z) &= (0, y, z) \\
F(\sigma(y,z)) &= (2, 0, z^2) \\
\sigma_y \wedge \sigma_z &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Cette normale est intérieure. En effet, sur le dessin, on voit que la normale extérieure et parallèle à l'axe x, mais pointe vers les x négatifs, i.e. on s'attend à ce que la première composante de la normale est négative.



Ainsi,

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma_4} \langle F, \nu \rangle \, ds &= -\int_0^2 \int_{-\frac{4-z}{2}}^{\frac{4-z}{2}} \left\langle (2,0,z^2), (1,0,0) \right\rangle dydz \\
&= \int_0^2 2z - 8dz \\
&= \left[z^2 - 8z\right]_{z=0}^{z=2} \\
&= 4 - 16 \\
&= -12
\end{aligned}$$

$\boxed{\Sigma_4 :}$: <u>*Variante 2*</u> : coordonnées cylindrique, séparation $\theta = -\frac{\pi}{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.
On peut séparer Σ_4 en deux parties (C'est ce qui se produit si on cherche le bord du domaine de la parmétrisation de Ω.)

$$\Sigma_4^1 = \left\{ (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \theta = -\frac{\pi}{2}, \ z \in [0,2], \ 0 \leq r \leq \frac{4-z}{2} \right\}$$
$$\Sigma_4^2 = \left\{ (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \theta = \frac{\pi}{2}, \ z \in [0,2], \ 0 \leq r \leq \frac{4-z}{2} \right\}$$

Et donc,
$\boxed{\Sigma_4^1 :}$

$$\sigma\colon \left\{ (r,z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ z \in [0,2], \ 0 \leq r \leq \frac{4-z}{2} \right\} \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{aligned} \sigma(r,z) &= (0,-r,z) \\ F(\sigma(r,z)) &= (2,0,z^2) \\ \sigma_r \wedge \sigma_z &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cette normale est extérieure. Ainsi,

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_4^1} \langle F, \nu \rangle \, ds &= \int_0^2 \int_0^{\frac{4-z}{2}} \left\langle \left(2,0,z^2\right), (-1,0,0) \right\rangle drdz \\ &= \int_0^2 z - 4dz \\ &= -6 \end{aligned}$$

Pour l'autre partie
$\boxed{\Sigma_4^2 :}$

$$\sigma\colon \left\{ (r,z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ z \in [0,2], \ 0 \leq r \leq \frac{4-z}{2} \right\} \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{aligned} \sigma(r,z) &= (0,r,z) \\ F(\sigma(r,z)) &= (2,0,z^2) \\ \sigma_r \wedge \sigma_z &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cette normale est intérieure. Ainsi,

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_4^2} \langle F, \nu \rangle \, ds &= -\int_0^2 \int_0^{\frac{4-z}{2}} \left\langle \left(2,0,z^2\right), (1,0,0) \right\rangle drdz \\ &= \int_0^2 z - 4dz \\ &= -6 \end{aligned}$$

et donc

$$\iint_{\Sigma_4} \langle F, \nu \rangle \, ds = -6 - 6 = -12$$

Pour finir,

$$\begin{aligned}\iint_{\partial\Omega} \langle F,\nu\rangle &= \iint_{\Sigma_1} \langle F,\nu\rangle\, ds + \iint_{\Sigma_2} \langle F,\nu\rangle\, ds + \iint_{\Sigma_3} \langle F,\nu\rangle\, ds + \iint_{\Sigma_4} \langle F,\nu\rangle\, ds \\ &= \frac{2}{15} + 2\pi + 16 + \frac{2}{15} + \frac{5\pi}{3} - \frac{64}{15} - 12 = \frac{11\pi}{3}\end{aligned}$$

qui est bien le même résultat que pour $\iiint_\Omega \operatorname{div} F(x,y,z)dxdydz$

Exercice 4 (ex 6.11 p. 67, corrigé p. 81)**.**
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier et ν un champ de normales unités extérieures à Ω. Soient les champs vectoriels F, G_1, G_2 et G_3 définis par

$$F(x,y,z) = (x,y,z)\,, \quad G_1(x,y,z) = (x,0,0)\,, \quad G_2(x,y,z) = (0,y,0)\,, \quad G_3(x,y,z) = (0,0,z)\,.$$

Montrer que :

(i) $\text{Volume}(\Omega) = \dfrac{1}{3}\displaystyle\iint_{\partial\Omega} \langle F,\nu\rangle \,\mathrm{d}s$

(ii) $\text{Volume}(\Omega) = \displaystyle\iint_{\partial\Omega} \langle G_i,\nu\rangle \,\mathrm{d}s$ pour $i = 1,2,3$.

Solution :

(i) Remarquons que $\operatorname{div} F(x,y,z) = 3$. Ainsi, par le théorème de la divergence,

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega} \langle F,\nu\rangle\, ds &= \frac{1}{3}\iiint_\Omega \operatorname{div} F(x,y,z)dxdydz = \frac{1}{3}\iiint_\Omega 3dxdydz \\ &= \iiint_\Omega 1dxdydz = \text{Volume}(\Omega),\end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.

(ii) Remarquons que pour $i = 1,2,3$, $\operatorname{div} G_i(x,y,z) = 1$. Ainsi, par le théorème de la divergence,

$$\iint_{\partial\Omega} \langle G_i,\nu\rangle\, ds = \iiint_\Omega \operatorname{div} G_i(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Omega 1dxdydz = \text{Volume}(\Omega),$$

qui est le résultat voulu.

Exercice 5 (ex 7.2 page 89, corrigé p. 91)**.**
Vérifier le théorème de Stokes pour $F(x,y,z) = (x^2y, z, x)$ et

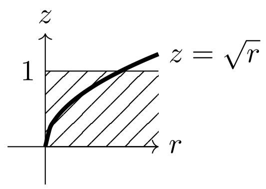
$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^4,\ 0 \le z \le 1\right\}.$$

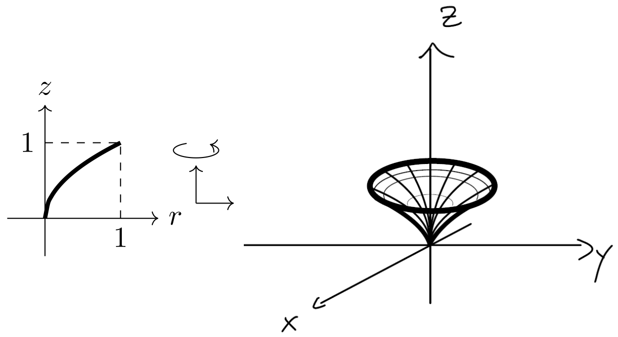
Solution :
Calcul $\operatorname{rot} F(x,y,z)$
On a

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-1 \\ 0-x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -x^2 \end{pmatrix}$$

Dessin Σ
On repère la symétrie cylindrique et on passe dans les coordonnées correspondantes : $(x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ avec $r \ge 0$, $\theta \in [0,2\pi]$ et $z \in \mathbb{R}$. Nos conditions deviennent

$$\begin{aligned} &x^2+y^2 = z^4 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = z^4 \quad \overset{r\ge 0}{\Leftrightarrow} \quad r = z^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{r} = z \\ &0 \le z \le 1 \quad\ \text{ne change pas}\end{aligned}$$





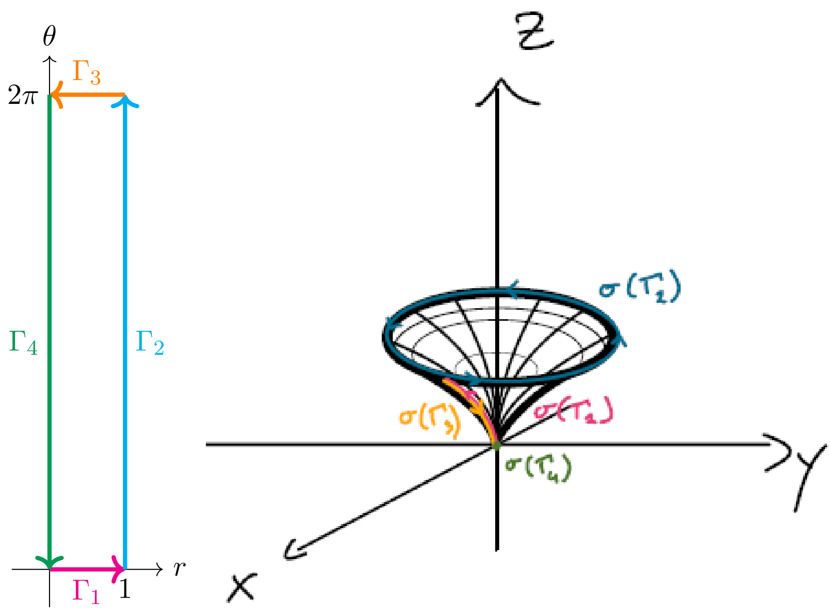
Calcul $\iint_\Sigma \operatorname{rot} F ds$ **: Variante 1** : z est une fonction de r.
On paramétrise Σ avec $\sigma\colon [0,1]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\sigma(r,\theta) = \left(r\cos\theta, r\sin\theta, \sqrt{r}\right).$$

On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} F(\sigma(r,\theta)) &= \left(-1,-1,-r^2\cos^2\theta\right)\\
\sigma_r \wedge \sigma_\theta &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ \cos\theta & \sin\theta & \frac{1}{2\sqrt{r}}\\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0\end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{r}\cos\theta\\ -\frac{1}{2}\sqrt{r}\sin\theta\\ r\end{pmatrix}\\
\iint_\Sigma \operatorname{rot} F ds &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left\langle \left(-1,-1,-r^2\cos^2\theta\right), \left(-\frac{1}{2}\sqrt{r}\cos\theta, -\frac{1}{2}\sqrt{r}\sin\theta, r\right)\right\rangle drd\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{r}\left(\cos\theta+\sin\theta\right) - r^3\cos^2\theta \; drd\theta\\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3}r^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=1}\left(\cos\theta+\sin\theta\right) - \left[\frac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{r=1}\cos^2\theta \; d\theta\\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\left(\cos\theta+\sin\theta\right) - \frac{1}{4}\cos^2\theta \; d\theta\\
&= \frac{1}{3}\left[\sin\theta - \cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} - \frac{1}{8}\left[\theta + \cos\theta\sin\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\\
&= -\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Alternativement, on peut trouver la primitive de $\cos^2\theta$ en utilisant les formules d'Euler.
Calcul $\int_{\partial\Sigma} F dl$ **: Variante 1** : z est une fonction de r.
Détermination du bord : Le bord de $A = [0,1]\times[0,2\pi]$ est séparé en 4 parties.



$\boxed{\Gamma_1 :}$

$$\gamma_1 \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$$
$$\gamma_1(t) = (t, 0) \qquad \oplus$$
$$\sigma \circ \gamma_1(t) = (t, 0, \sqrt{t})$$
$$(\sigma \circ \gamma_1)'(t) = \left(1, 0, \frac{1}{2\sqrt{t}}\right)$$

$\boxed{\Gamma_2 :}$

$$\gamma_2 \colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$\gamma_2(t) = (1, t) \qquad \oplus$$
$$\sigma \circ \gamma_2(t) = (\cos t, \sin t, 1)$$
$$(\sigma \circ \gamma_2)'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

$\boxed{\Gamma_3 :}$

$$\gamma_3 \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$$
$$\gamma_3(t) = (t, 2\pi) \qquad \ominus$$
$$\sigma \circ \gamma_3(t) = (t, 0, \sqrt{t})$$
$$(\sigma \circ \gamma_3)'(t) = \left(1, 0, \frac{1}{2\sqrt{t}}\right)$$

Même courbe que pour Γ_1 parcourue danns le sens opposé : On enlève Γ_1 et Γ_3

$\boxed{\Gamma_4 :}$

$$\gamma_4 \colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$\gamma_4(t) = (0, t) \qquad \ominus$$
$$\sigma \circ \gamma_4(t) = (0, 0, 0)$$
$$(\sigma \circ \gamma_4)'(t) = (0, 0, 0)$$

Un point : on enlève

Notez que pour déterminier l'orientation des différentes parties du bord, on s'est référé à l'orientation du bord de A. Vu qu'on a choisi la normale $\sigma_r \wedge \sigma_\theta$ (et non $\sigma_\theta \wedge \sigma_r$) on a mis r en axe horizontal et θ en axe vertical[3]. Cette convention garantit la compatibilité entre l'orientation du bord de Σ et la normale choisie.

3. Ouais, je sais, ils ont des noms scientifico-pédants style absisse et ordonnée, mais je les confonds toujours...

On a donc

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Sigma} F\cdot dl = \int_{\sigma(\Gamma_2)} F\cdot dl &= \int_0^{2\pi} \langle F(\cos t,\sin t,1),(-\sin t,\cos t,0)\rangle\, dt\\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \left(\cos^2 t\sin t, 1, \cos t\right), (-\sin t,\cos t,0)\right\rangle dt\\ &= \int_0^{2\pi} -\cos^2 t\sin^2 t+\cos t dt\end{aligned}$$

On trouve une primitive de $\cos^2 t\sin^2 t$ à l'aide des formules d'Euler :

$$\begin{aligned}\cos^2 t\sin^2 t &= \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^2\\ &= \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^2\\ &= \frac{\left(e^{2it}-e^{-2it}\right)^2}{-16}\\ &= -\frac{1}{16}\left(e^{4it}-2+e^{-4it}\right)\\ &= \frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos(4t)\\ \Rightarrow \int \cos^2 t\sin^2 t dt &= \frac{t}{8}-\frac{1}{32}\sin(4t)\end{aligned}$$

On conclut donc

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Sigma} F\cdot dl &= \left[\frac{1}{32}\sin(4t)-\frac{t}{8}+\sin(t)\right]_0^{2\pi}\\ &= -\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Calcul $\iint_\Sigma \operatorname{rot} F ds$ **: Variante 2** : r est une fonction de z.

On paramétrise Σ avec $\sigma\colon [0,2\pi]\times[0,1]\to\mathbb{R}^3$ définie par

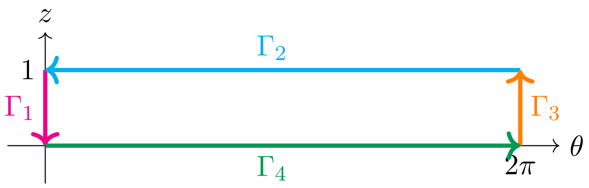
$$\sigma(\theta,z) = \left(z^2\cos\theta, z^2\sin\theta, z\right).$$

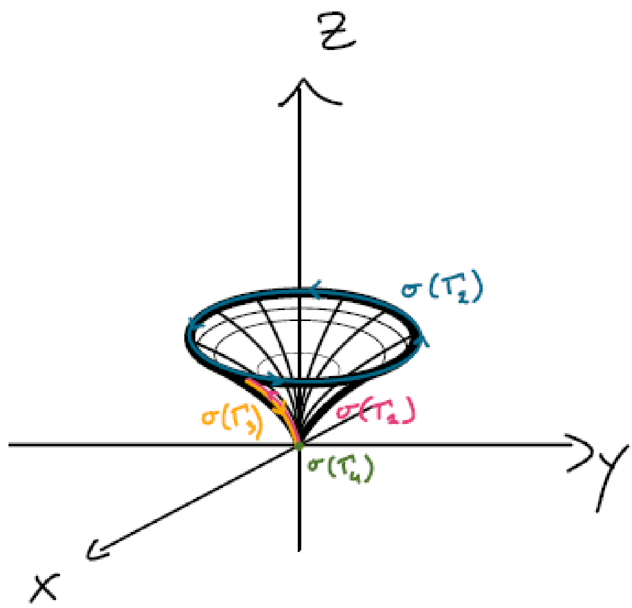
On a

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} F(\sigma(\theta,z)) &= \left(-1,-1,-z^4\cos^2\theta\right)\\ \sigma_\theta\wedge\sigma_z &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ -z^2\sin\theta & z^2\cos\theta & 0\\ 2z\cos\theta & 2z\sin\theta & 1\end{vmatrix} = \begin{pmatrix} z^2\cos\theta\\ z^2\sin\theta\\ -2z^3\end{pmatrix}\\ \iint_\Sigma \operatorname{rot} F ds &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left\langle \left(-1,-1,-z^4\cos^2\theta\right), \left(z^2\cos\theta, z^2\sin\theta, -2z^3\right)\right\rangle dz d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 -z^2(\cos\theta+\sin\theta)+2z^7\cos^2\theta dz d\theta\\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3}z^3\right]_{z=0}^{z=1}(\cos\theta+\sin\theta)+\left[\frac{1}{4}z^8\right]_{z=0}^{z=1}\cos^2\theta d\theta\\ &= \frac{1}{3}\left[-\sin\theta+\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}+\frac{1}{8}\left[\theta+\cos\theta\sin\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Calcul $\int_{\partial\Sigma} F dl$ **: Variante 2** : r est une fonction de z.

Détermination du bord : Le bord de $A=[0,2\pi]\times[0,1]$ est séparé en 4 parties.





$\boxed{\Gamma_1 :}$

$\gamma_1 \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma_1(t) = (0, t)$ $\ominus$

$\sigma \circ \gamma_1(t) = (t^2, 0, t)$

$(\sigma \circ \gamma_1)'(t) = (2t, 0, 1)$

$\boxed{\Gamma_2 :}$

$\gamma_2 \colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma_2(t) = (t, 1)$ $\ominus$

$\sigma \circ \gamma_2(t) = (\cos t, \sin t, 1)$

$(\sigma \circ \gamma_2)'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$

$\boxed{\Gamma_3 :}$

$\gamma_3 \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma_3(t) = (2\pi, t)$ $\oplus$

$\sigma \circ \gamma_3(t) = (t^2, 0, t)$

$(\sigma \circ \gamma_3)'(t) = (2t, 0, 1)$

Même courbe que pour Γ_1 parcourue danns le sens opposé : On enlève Γ_1 et Γ_3

$\boxed{\Gamma_4 :}$

$\gamma_4 \colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma_4(t) = (t, 0)$ $\oplus$

$\sigma \circ \gamma_4(t) = (0, 0, 0)$

$(\sigma \circ \gamma_4)'(t) = (0, 0, 0)$

Un point : on enlève

On a donc (il s'agit des mêmes calculs que la première variante, mais avec un signe opposé)

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl = -\int_{\sigma(\Gamma_2)} F \cdot dl &= -\int_0^{2\pi} \langle F(\cos t, \sin t, 1), (-\sin t, \cos t, 0)\rangle \, dt \\
&= -\int_0^{2\pi} \Big\langle \Big(\cos^2 t \sin t, 1, \cos t\Big), (-\sin t, \cos t, 0) \Big\rangle \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t - \cos t dt \\
&= \left[-\frac{1}{32}\sin(4t) + \frac{t}{8} - \sin(t)\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Exercice 6 (Ex 7.5 page 89, corrigé p. 94)**.**
Vérifier le théorème de Stokes pour $F(x,y,z) = (0, z^2, 0)$ et

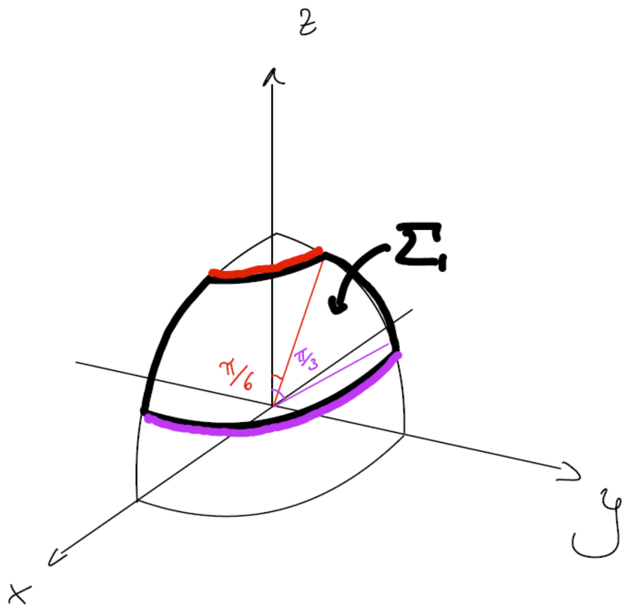
$$\Sigma = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq z \leq \sqrt{3}\Big\}.$$

Solution :
Calcul $\operatorname{rot} F(x,y,z)$
On a

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & z^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dessin Σ
On passe en coordonnées sphériques $(x,y,z) = (r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0,\pi]$, $r \geq 0$. Nos conditions deviennent

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 = 4 &\Leftrightarrow r^2 = 4 \\
&\Leftrightarrow r = 2 \\
x \geq 0 &\Leftrightarrow \theta \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\
y \geq 0 &\Leftrightarrow \theta \in [0,\pi] \\
1 \leq z \leq \sqrt{3} &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \cos\varphi \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\Leftrightarrow \varphi \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]
\end{aligned}$$



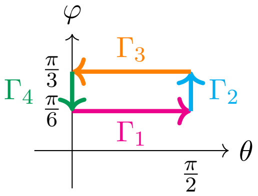
Calcul $\iint_\Sigma \operatorname{rot} F ds$ **:**
On paramétrise Σ avec $\sigma\colon\ [0, \frac{\pi}{2}] \times [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}] \to \mathbb{R}^3$ définie par

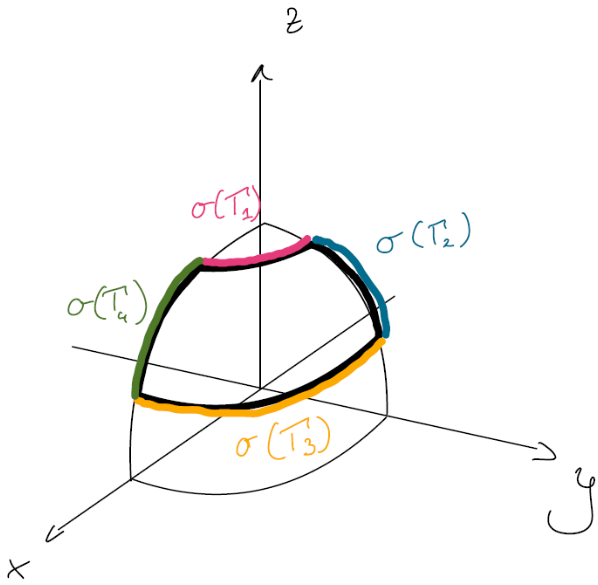
$$\sigma(\theta, \varphi) = (2\cos\theta\sin\varphi, 2\sin\theta\sin\varphi, 2\cos\varphi)\,.$$

On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} F(\sigma(\theta,\varphi)) &= (-4\cos\varphi, 0, 0)\\
\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2\sin\theta\sin\varphi & 2\cos\theta\sin\varphi & 0 \\ 2\cos\theta\cos\varphi & 2\sin\theta\cos\varphi & -2\sin\varphi \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -4\cos\theta\sin^2\varphi \\ -4\sin\theta\sin^2\varphi \\ -4\cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}\\
\iint_\Sigma \operatorname{rot} F ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left\langle (-4\cos\varphi, 0, 0)\,, \left(-4\cos\theta\sin^2\varphi, -4\sin\theta\sin^2\varphi, -4\cos\varphi\sin\varphi\right)\right\rangle d\varphi d\theta\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 16\cos\theta\cos\varphi\sin^2\varphi d\varphi d\theta\\
&= 16\left[\sin\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_{\varphi=\frac{\pi}{6}}^{\varphi=\frac{\pi}{3}}\\
&= \frac{16}{3}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - \frac{1}{8}\right) = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Calcul $\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$ **:**
Le bord de $A = [0, \frac{\pi}{2}] \times [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ se sépare en 4 parties :





$\boxed{\Gamma_1}$ $\qquad \oplus$

$$\gamma_1 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$$
$$\gamma_1(t) = \left(t, \frac{\pi}{6}\right)$$
$$\sigma \circ \gamma_1(t) = \left(\cos t, \sin t, \sqrt{3}\right)$$
$$(\sigma \circ \gamma_1)'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$$

$\boxed{\Gamma_2}$ $\qquad \oplus$

$$\gamma_2 : \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}^2$$
$$\gamma_2(t) = \left(\frac{\pi}{2}, t\right)$$
$$\sigma \circ \gamma_2(t) = (0, 2\sin t, 2\cos t)$$
$$(\sigma \circ \gamma_2)'(t) = (0, 2\cos t, -2\sin t)$$

$\boxed{\Gamma_3}$ $\qquad \ominus$

$$\gamma_3 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$$
$$\gamma_3(t) = \left(t, \frac{\pi}{3}\right)$$
$$\sigma \circ \gamma_3(t) = \left(\sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\sin t, 1\right)$$
$$(\sigma \circ \gamma_3)'(t) = \left(-\sqrt{3}\sin t, \sqrt{3}\cos t, 1\right)$$

$\boxed{\Gamma_4}$ $\qquad \ominus$

$$\gamma_4 : \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}^2$$
$$\gamma_4(t) = (0, t)$$
$$\sigma \circ \gamma_4(t) = (2\sin t, 0, 2\cos t)$$
$$(\sigma \circ \gamma_4)'(t) = (2\cos t, 0, -2\sin t)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma(\Gamma_1)} F \cdot dl &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle (0,3,0), (-\sin(t), \cos(t), 0) \rangle \, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos t \, \mathrm{d}t = 3 \left[\sin(t)\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma(\Gamma_2)} F \cdot dl &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left\langle \left(0, 4\cos^2 t, 0\right), (0, 2\cos t, -2\sin t) \right\rangle dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 8 \cos^3 t dt = 8 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos t - \cos t \sin^2 t dt \\
&=8 \left[\sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t\right]_{t=\frac{\pi}{6}}^{t=\frac{\pi}{3}} \\
&=8 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3} \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{1}{8} \right) \\
&=8 \left(\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{11}{24} \right) = 3\sqrt{3} - \frac{11}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma(\Gamma_3)} F \cdot dl &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\langle (0,1,0), \left(-\sqrt{3}\sin t, \sqrt{3}\cos t, 1\right) \right\rangle dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3} \; costdt = \sqrt{3} \left[\sin(t)\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$\int_{\sigma(\Gamma_4)} F \cdot dl = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left\langle \left(0, 4\cos^2 t, 0\right), (2\cos t, 0, -2\sin t) \right\rangle dt = 0$$

On conclut donc

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl = + \int_{\sigma(\Gamma_1)} F \cdot dl + \int_{\sigma(\Gamma_2)} F \cdot dl - \int_{\sigma(\Gamma_3)} F \cdot dl - \int_{\sigma(\Gamma_4)} F \cdot dl = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3},$$

qui est le résultat attendu.