

Exercice 1.

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière orientable avec un champ de normales unités ν . On considère $F : \Sigma \mapsto \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel continu. Montrer que le flux de F à travers la surface Σ dans la direction ν est égal à l'intégrale du champ scalaire $F \cdot \nu$ sur Σ .

Solution :

Rappel : le flux d'un champ vectoriel continu F à travers la surface régulière orientable $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ est défini par :

$$\iint_{\Sigma} F \cdot ds.$$

Le signe de cette expression est ambigu si on ne précise pas la direction du champ de normales continu (qui existe puisque Σ est orientable) le long de Σ utilisé.

Ici, on a précisé le choix d'un champ de normales unités ν le long de Σ .

Soit donc $\sigma : A \mapsto \Sigma$ une paramétrisation de Σ définie par $\sigma(u, v)$, **qui respecte le choix d'orientation** de Σ , c'est à dire que

$$\frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|} = \nu(u, v).$$

En utilisant les définitions du cours pour les intégrales de surface d'un champ scalaire et d'un champ vectoriel, on a :

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (F \cdot \nu) ds &= \iint_A [F(\sigma(u, v)) \cdot \nu(u, v)] \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| dudv \\ &= \iint_A [F(\sigma(u, v)) \cdot \sigma_u \wedge \sigma_v] dudv \\ &= \iint_{\Sigma} F \cdot ds, \end{aligned}$$

comme désiré. On remarquera que le signe d'une intégrale de surface d'un champ scalaire n'est, lui, pas ambigu (on prend la norme de $\sigma_u \wedge \sigma_v$, son sens n'importe pas). Ici, et comme dans le théorème de la divergence, c'est le choix explicite d'une normale ν qui fixe le signe.

Exercice 2 (ex 5.3 p. 57, corrigé p. 58).

Soit $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}$.

Calculer la masse de la surface Σ sachant que la densité est $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Indication : Pour la paramétrisation, voir série 6 exercice 2.

Solution :

On reprend la paramétrisation de la série 6 : $\sigma : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{aligned} \sigma(r, \theta) &= (r \cos \theta, r \sin \theta, r) \\ \|\sigma_r \wedge \sigma_\theta\| &= \sqrt{2}r \end{aligned}$$

ainsi,

$$\begin{aligned} \rho(\sigma(r, \theta)) &= \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = r \\ \int_{\Sigma} \rho ds &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{2}r^2 dr d\theta \\ &= \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} \end{aligned}$$

Exercice 3 (ex 5.5 p. 57, corrigé p. 60).

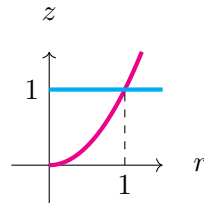
Soit $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.

Calculer l'aire de $\partial\Omega$.

Solution :

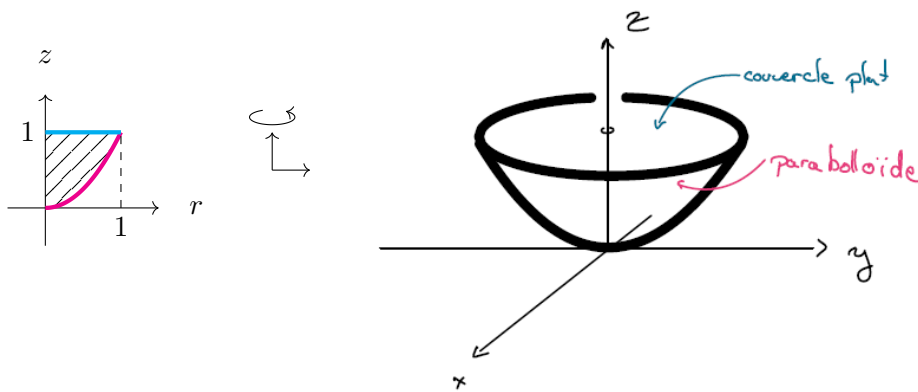
On repère la symétrie cylindrique et on passe dans les coordonnées correspondantes : $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ avec $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ et $z \in \mathbb{R}$. Nos conditions deviennent

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 \leq z &\Leftrightarrow r^2 \leq z \\ z \leq 1 &\Leftrightarrow \text{change pas} \end{aligned}$$



où on a trouvé les coordonnées du point d'intersection en résolvant le système

$$\begin{cases} r^2 = z \\ z = 1 \end{cases}$$



Le bord de Ω se sépare donc en deux parties Σ_1 , la partie parabolique quand $r^2 = z$ et Σ_2 le couvercle plat quand $z = 1$.

Σ_1 :

$$\sigma: [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\sigma(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r^2)$$

$$\sigma_r \wedge \sigma_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos \theta & \sin \theta & 2r \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2r^2 \cos \theta \\ -2r^2 \sin \theta \\ r \end{pmatrix}$$

$$\|\sigma_r \wedge \sigma_\theta\| = \sqrt{4r^4 + r^2} = r\sqrt{4r^2 + 1}$$

$$\text{Aire}(\Sigma_1) = \iint_{\Sigma_1} 1 ds = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\sqrt{4r^2 + 1} dr d\theta$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{12} (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{6} (5^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{(5\sqrt{5} - 1)\pi}{6}$$

Σ_2 :

$$\sigma: [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\sigma(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 1)$$

$$\sigma_r \wedge \sigma_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

$$\|\sigma_r \wedge \sigma_\theta\| = r$$

$$\text{Aire}(\Sigma_2) = \iint_{\Sigma_2} 1 ds = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\theta = \pi.$$

(on aurait aussi pu remarquer que Σ_2 est un disque de rayon 1 et utiliser la formule πR^2)

Pour finir,

$$\text{Aire}(\partial\Omega) = \text{Aire}(\Sigma_1) + \text{Aire}(\Sigma_2) = \frac{(5\sqrt{5} - 1)\pi}{6} + \pi = \frac{5(\sqrt{5} + 1)\pi}{6}$$

Exercice 4 (ex 5.2 p. 57, corrigé p.58).

Soient $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ et

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2 \text{ et } 0 \leq z \leq 1 \right\}.$$

Calculer le flux passant à travers Σ dans la direction ascendante (c'est-à-dire dans la direction des $z > 0$).

Solution :

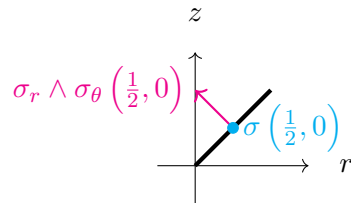
On reprend la paramétrisation de l'exercice 2 de cette série ou de la série 6 : $\sigma: [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\sigma(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r)$$

$$\sigma_r \wedge \sigma_\theta = \begin{pmatrix} -r \cos \theta \\ -r \sin \theta \\ r \end{pmatrix}$$

Pour savoir si la normale $\sigma_r \wedge \sigma_\theta$ est ascendante ou descendante on peut soit constater que la troisième composante est toujours positive et donc elle pointe vers le haut et est ascendante, soit la tester sur le dessin. On regarde ce qu'il se passe en $r = \frac{1}{2}$, $\theta = 0$:

dans le plan $\theta = 0$, i.e. dans le plan $y = 0$, $x \geq 0$



Vu que le vecteur pointe vers le haut, la direction est ascendante.

Pour finir,

$$\begin{aligned}
 F(\sigma(r, \theta)) &= (r^2 \cos^2 \theta, r^2 \sin^2 \theta, r^2) \\
 \iint_{\Sigma} F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \langle F(\sigma(r, \theta), \sigma_r \wedge \sigma_\theta) \rangle dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \langle (r^2 \cos^2 \theta, r^2 \sin^2 \theta, r^2), (-r \cos \theta, -r \sin \theta, r) \rangle dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 -r^3 \cos^3 \theta - r^3 \sin^3 \theta + r^3 dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{4} \cos^3 \theta - \frac{1}{4} \sin^3 \theta + \frac{1}{4} d\theta \\
 &= -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta + (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta + \frac{\pi}{2} \\
 &= -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos \theta - \sin^2 \theta \cos \theta + \sin \theta - \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{4} \left[\sin \theta + \frac{1}{3} \sin^3 \theta - \cos \theta - \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{2\pi} + \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

où on a utilisé que $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ et $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$. Alternativement, on peut calculer la primitive de $\cos^3 \theta$ et $\sin^3 \theta$ à l'aide des formules d'Euler :

$$\begin{aligned}
 \cos^3 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}) \\
 &= \frac{1}{4} \frac{e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}}{2} + \frac{3}{4} \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\
 &= \frac{1}{4} \cos(3\theta) + \frac{3}{4} \cos(\theta) \\
 \int \cos^3 \theta d\theta &= \frac{1}{12} \sin(3\theta) + \frac{3}{4} \sin(\theta) \\
 \\
 \sin^3 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 = -\frac{1}{8i} (e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}) \\
 &= -\frac{1}{4} \frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i} + \frac{3}{4} \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\
 &= -\frac{1}{4} \sin(3\theta) + \frac{3}{4} \sin(\theta) \\
 \int \sin^3 \theta d\theta &= \frac{1}{2} \cos(3\theta) - \frac{3}{4} \cos(\theta)
 \end{aligned}$$

Exercice 5 (ex 5.4 p. 57, corrigé p. 58).

Soient $F(x, y, z) = (0, z, z)$ et

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 6 - 3x - 2y \text{ et } x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \right\}.$$

Calculer le flux qui passe par cette surface et qui s'éloigne de l'origine.

Solution :

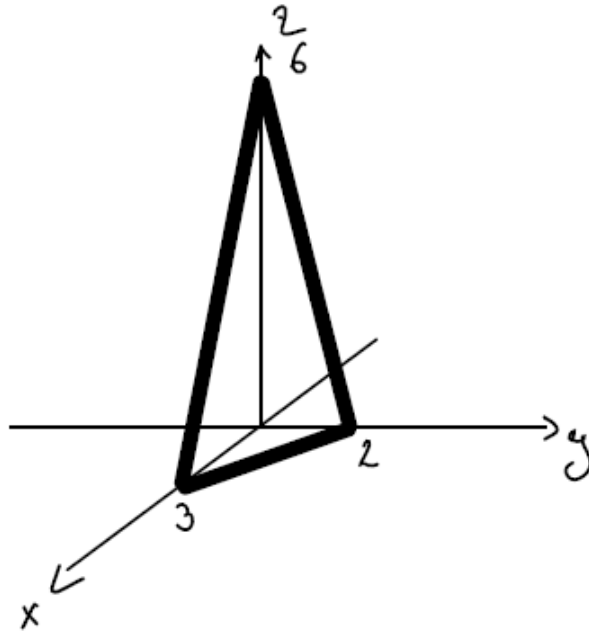
Vu que l'égalité $z = 6 - 3x - 2y$ est affine, on s'attend à ce que la surface soit dans un bout de plan.

Ragardons où le plan croise les axes pour reconstruire la surface :

$$(0, 0, z) \in \Sigma \Leftrightarrow z = 6$$

$$(0, y, 0) \in \Sigma \Leftrightarrow y = 3$$

$$(x, 0, 0) \in \Sigma \Leftrightarrow x = 2$$



Pour trouver le domaine de la paramétrisation, on procède de la façon suivante :

$$6 - 3x - 2y = z \geq 0 \Rightarrow 3x + 2y \leq 6 \Rightarrow y \leq 3 - \frac{3}{2}x.$$

Par transitivité on récupère également

$$0 \leq y \leq 3 - \frac{3}{2}x \Rightarrow \frac{3}{2}x \leq 3 \Rightarrow x \in [0, 2].$$

Pour finir, une paramétrisation de Σ est $\sigma : \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2], 0 \leq y \leq 3 - \frac{3}{2}x \right\}$ définie par

$$\sigma(x, y) = (x, y, 6 - 3x - 2y).$$

La normale induite par cette paramétrisation est

$$\sigma_x \wedge \sigma_y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vu que la troisième composante est positive, la normale est ascendante et donc, elle pointe dans la

bonne direction. On a pour finir

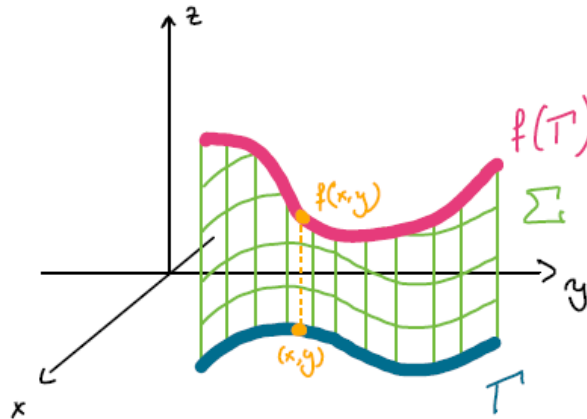
$$\begin{aligned}
 F(\sigma(x, y)) &= (0, 6 - 3x - 2y, 6 - 3x - 2y) \\
 \int_{\Sigma} F \cdot ds &= \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} \langle (0, 6 - 3x - 2y, 6 - 3x - 2y), (3, 2, 1) \rangle dy dx \\
 &= \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} 18 - 9x - 6y dy dx \\
 &= \int_0^2 [18y - 9xy - 3y^2]_{y=0}^{y=3-\frac{3}{2}x} dx \\
 &= \int_0^2 54 - 27x - 27x + \frac{27}{2}x^2 - 3 \left(3 - \frac{3}{2}x\right)^2 dx \\
 &= \int_0^2 54 - 54x + \frac{27}{2}x^2 - 3 \left(9 - 9x + \frac{9}{4}x^2\right) dx \\
 &= \int_0^2 54 - 54x + \frac{27}{2}x^2 - 27 + 27x - \frac{27}{4}x^2 dx \\
 &= \int_0^2 27 - 27x + \frac{27}{4}x^2 dx \\
 &= \left[27x - \frac{27}{2}x^2 + \frac{9}{4}x^3\right]_0^2 \\
 &= 54 - 54 + 18 = 18
 \end{aligned}$$

Exercice 6 (ex 5.7 p. 57, corrigé p. 61).

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $f \in C^1(\bar{\Omega})$ un champ scalaire tel que $f(x, y) > 0$ pour tout $(x, y) \in \bar{\Omega}$. On considère une courbe simple, régulière $\Gamma \subset \Omega$ et la surface $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ définie par

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Gamma \text{ et } 0 \leq z \leq f(x, y) \right\}.$$

Montrer que Aire $(\Sigma) = \int_{\Gamma} f dl$



Remarque : Ce résultat peut s'interpréter de la façon suivante : L'intégrale curviligne d'un champ scalaire de \mathbb{R}^2 donne l'aire de la surface entre Γ et le graphe de f .

Solution :

Variante 1 : f est dans le domaine de la paramétrisation.

Une paramétrisation de Σ peut être $\sigma : \{(t, z) \in \mathbb{R}^2 : t \in [a, b], 0 \leq z \leq f(\gamma(t))\}$ définie par

$$\sigma(t, z) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), z), \quad t \in [a, b], z \in [0, f(\gamma(t))].$$

On a alors

$$\begin{aligned}\sigma_t &= (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), 0) \\ \sigma_z &= (0, 0, 1) \\ \sigma_t \wedge \sigma_z &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \gamma'_1(t) & \gamma'_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t), 0) \\ \|\sigma_t \wedge \sigma_z\| &= \|\gamma'(t)\|.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\text{Aire}(\Sigma) = \int_{\Sigma} 1 ds = \int_a^b \int_0^{f(\gamma(t))} \|\sigma_t \wedge \sigma_z\| dz dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\Gamma} f dl.$$

Variante 2 : f est dans l'expression de la paramétrisation.

Une paramétrisation de Σ peut être $\sigma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\sigma(t, h) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), h \cdot f(\gamma(t)))$$

On a alors

$$\begin{aligned}\sigma_t &= (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), h \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle) \\ \sigma_h &= (0, 0, f(\gamma(t))) \\ \sigma_t \wedge \sigma_h &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \gamma'_1(t) & \gamma'_2(t) & \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \\ 0 & 0 & f(\gamma(t)) \end{vmatrix} = (\gamma'_2(t)f(\gamma(t)), -\gamma'_1(t)f(\gamma(t)), 0) \\ \|\sigma_t \wedge \sigma_h\| &= |f(\gamma(t))| \cdot \|\gamma'(t)\| \stackrel{f \geq 0}{=} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\text{Aire}(\Sigma) = \int_{\Sigma} 1 ds = \int_a^b \int_0^1 \|\sigma_t \wedge \sigma_h\| dh dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\Gamma} f dl$$

Exercice 7 (ex 6.4 page 66, corrigé p. 72).

Vérifier le théorème de la divergence pour $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ et

$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : b^2(x^2 + y^2) < a^2 z^2 \text{ et } 0 < z < b\}$.

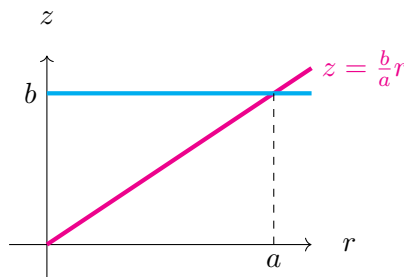
Solution :

Sans perte de généralité, on va supposer que $a > 0$ (vu que seul le carré de a apparaît, son signe n'importe pas au résultat.)

On repère la symétrie cylindrique et on passe dans les coordonnées correspondantes : $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ avec $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ et $z \in \mathbb{R}$.

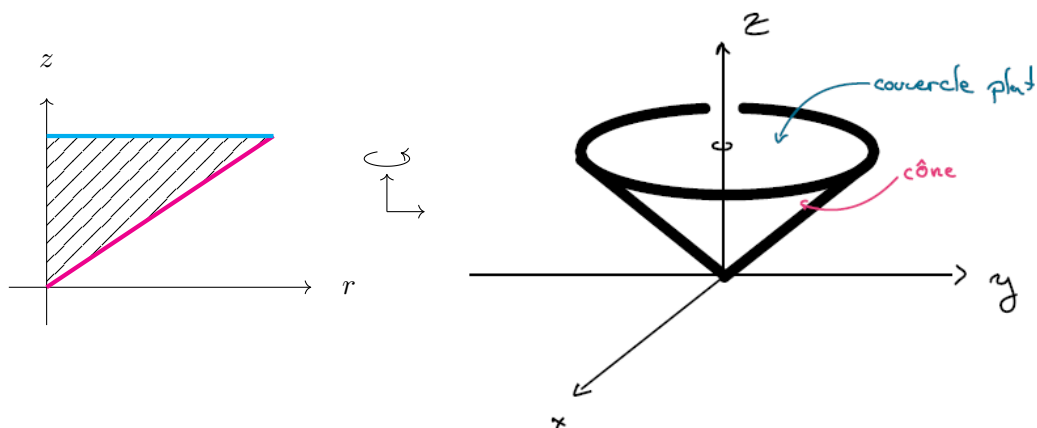
Nos conditions deviennent

$$\begin{aligned}b^2(x^2 + y^2) < a^2 z^2 &\Leftrightarrow br < az &\Leftrightarrow \frac{b}{a} r < z \\ 0 < z < b &\text{ change pas}\end{aligned}$$



où on a trouvé les coordonnées du point d'intersection en résolvant le système

$$\begin{cases} z = b \\ z = \frac{b}{a}r \end{cases}$$



Calcul $\operatorname{div} F$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} [x^2] = 2x \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y} [y^2] = 2y \\ \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial z} [z^2] = 2z \\ \operatorname{div} F(x, y, z) &= 2(x + y + z). \end{aligned}$$

Variante 1 : avec une paramétrisation z -simple

Calcul $\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) dx dy dz$, **Variante 1**

Comme déjà dit, on est en coordonnées cylindriques $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ et les bornes sont

$$\begin{aligned} \theta &\in [0, 2\pi] \\ r &\in [0, a] \\ \frac{b}{a}r &\leq z \leq b \end{aligned}$$

Vu que le jacobien des coordonnées polaires est r , on a

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_{\frac{b}{a}r}^b 2(r \cos \theta + r \sin \theta + z) r dz dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[2r^2 z \cos \theta + 2r^2 z \sin \theta + z^2 r \right]_{z=\frac{b}{a}r}^{z=b} dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(2r^2 b \cos \theta + 2r^2 b \sin \theta + b^2 r - 2r^3 \frac{b}{a} \cos \theta - 2r^3 \frac{b}{a} \sin \theta - \frac{b^2 r^3}{a^2} \right) dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(2r^2 b - 2r^3 \frac{b}{a} \right) (\cos \theta + \sin \theta) + b^2 r - \frac{b^2 r^3}{a^2} dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{2b}{3} r^3 - \frac{b}{2a} r^4 \right) (\cos \theta + \sin \theta) + \frac{b^2}{2} r^2 - \frac{b^2}{4a^2} r^4 \right]_{r=0}^{r=a} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2ba^3}{3} - \frac{ba^3}{2} \right) (\cos \theta + \sin \theta) + \frac{b^2 a^2}{2} - \frac{b^2 a^2}{4} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{ba^3}{6} (\cos \theta + \sin \theta) d\theta + \frac{\pi a^2 b^2}{2} \\
&= \frac{ba^3}{6} [\sin \theta - \cos \theta]_0^{2\pi} + \frac{\pi a^2 b^2}{2} \\
&= \frac{\pi a^2 b^2}{2}
\end{aligned}$$

Variante 2 : avec une paramétrisation r -simple

Calcul $\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) dx dy dz$, **Variante 2**

Comme déjà dit, on est en coordonnées cylindriques $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ et les bornes sont

$$\begin{aligned}
\theta &\in [0, 2\pi] \\
z &\in [0, b] \\
0 &\leq r \leq \frac{a}{b} z
\end{aligned}$$

Vu que le jacobien des coordonnées polaires est r , on a

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^b \int_0^{\frac{a}{b}z} 2(r \cos \theta + r \sin \theta + z) r dr dz d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^b \left[\frac{2}{3} r^3 (\cos \theta + \sin \theta) + z r^2 \right]_{r=0}^{r=\frac{a}{b}z} dz d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{2a^3}{3b^3} z^3 (\cos \theta + \sin \theta) + \frac{a^2}{b^2} z^3 dz d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{a^3}{6b^3} z^4 (\cos \theta + \sin \theta) + \frac{a^2}{4b^2} z^4 \right]_{z=0}^{z=b} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{a^3 b}{6} (\cos \theta + \sin \theta) + \frac{a^2 b^2}{4} d\theta \\
&= \frac{a^3 b}{6} [\sin \theta - \cos \theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} + \frac{\pi a^2 b^2}{2} \\
&= \frac{\pi a^2 b^2}{2}.
\end{aligned}$$

Calcul $\iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle ds$

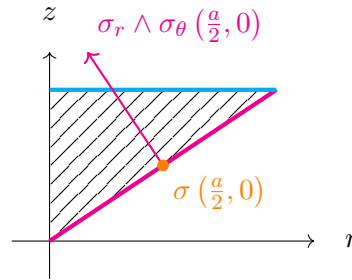
Le bord de Ω se sépare en 2 parties Σ_1 , la partie cônica quand $z = \frac{b}{a}r$ et Σ_2 , le couvercle plat quand $z = b$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \Sigma_1: \\ \sigma: [0, a] \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \sigma(r, \theta) &= \left(r \cos \theta, r \sin \theta, \frac{b}{a}r \right) \\ \sigma_r \wedge \sigma_\theta &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos \theta & \sin \theta & \frac{b}{a} \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a}r \cos \theta \\ -\frac{b}{a}r \sin \theta \\ r \end{pmatrix} \\ F(\sigma(r, \theta)) &= \left(r^2 \cos^2 \theta, r^2 \sin^2 \theta, \frac{b^2}{a^2}r^2 \right) \end{aligned}$$

Cette normale est intérieure. En effet, sur la partie cônica, on s'attend à ce que la normale pointe vers le bas, i.e. on s'attend que la troisième composante est négative. Or, ici, la troisième composante, r est toujours positive.

Alternativement, on peut tester la normale en $r = \frac{a}{2}$ et $\theta = 0$.

coupe dans le plan $\theta = 0$, i.e. dans le plan $y = 0$ et $x \geq 0$



Ainsi, on corrige le signe et

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_1} \langle F, \nu \rangle ds &= - \int_0^{2\pi} \int_0^a \left\langle \left(r^2 \cos^2 \theta, r^2 \sin^2 \theta, \frac{b^2}{a^2}r^2 \right), \left(-\frac{b}{a}r \cos \theta, -\frac{b}{a}r \sin \theta, r \right) \right\rangle dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{b}{a}r^3 (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) - \frac{b^2}{a^2}r^3 dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{b}{4a}r^4 ((1 - \sin^2 \theta) \cos \theta + (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta) - \frac{b^2}{4a^2}r^4 \right]_{r=0}^{r=a} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{ba^3}{4} (\cos \theta - \sin^2 \theta \cos \theta + \sin \theta - \cos^2 \theta \sin \theta) - \frac{a^2b^2}{4} d\theta \\ &= \frac{ba^3}{4} \left[\sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta - \cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} - \frac{\pi a^2 b^2}{2} \\ &= - \frac{\pi a^2 b^2}{2} \end{aligned}$$

Passons à la deuxième partie du bord :

Σ_2 :

$$\sigma: [0, a] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\sigma(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, b)$$

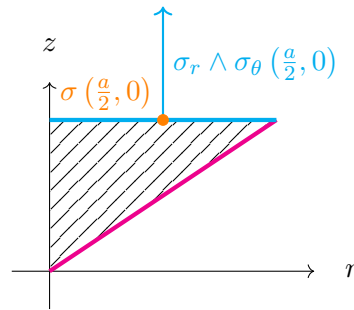
$$\sigma_r \wedge \sigma_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

$$F(\sigma(r, \theta)) = (r^2 \cos^2 \theta, r^2 \sin^2 \theta, b^2)$$

Cette normale est extérieure. En effet, sur la partie plate, on s'attend à ce que la normale pointe vers le haut, i.e. on s'attend à ce que la troisième composante est positive. Or, ici, la troisième composante r est toujours positive.

Alternativement, on peut tester la normale en $r = \frac{a}{2}$ et $\theta = 0$.

coupe dans le plan $\theta = 0$, i.e. dans le plan $y = 0$ et $x \geq 0$



ainsi,

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_2} \langle F, \nu \rangle ds &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \langle (r^2 \cos^2 \theta, r^2 \sin^2 \theta, b^2), (0, 0, r) \rangle dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a b^2 r dr d\theta \\ &= 2\pi \left[\frac{b^2}{2} r^2 \right]_{r=0}^{r=a} \\ &= \pi a^2 b^2. \end{aligned}$$

Pour finir,

$$\iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle ds = \iint_{\Sigma_1} \langle F, \nu \rangle ds + \iint_{\Sigma_2} \langle F, \nu \rangle ds = -\frac{\pi a^2 b^2}{2} + \pi a^2 b^2 = \frac{\pi a^2 b^2}{2}$$

qui est bien le résultat voulu.