

Exercice 1 (Ex 4.8 et 4.7 pages 43 et 42, corrigé p. 51).

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine régulier dont le bord $\partial\Omega$ est orienté positivement. Soit ν un champ de normales unités extérieures à Ω . Soient F un champ vectoriel tel que $F \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ et f un champ scalaire tel que $f \in C^2(\bar{\Omega})$. Montrer que :

(i) **Théorème de la divergence dans le plan :**

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y) \, dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, dl$$

Indication : écrire $F = (F_1, F_2)$ et appliquer le théorème de Green au champ vectoriel $\Phi = (-F_2, F_1)$ en se référant au §2.4 du cours.

(ii)
$$\iint_{\Omega} \Delta f(x, y) \, dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle \nabla f, \nu \rangle \, dl.$$

Solution :

(i) Remarquons que

$$\operatorname{rot} \Phi = \frac{\partial}{\partial x} [\Phi_2] - \frac{\partial}{\partial y} [\Phi_1] = \frac{\partial}{\partial x} [F_1] - \frac{\partial}{\partial y} [-F_2] = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = \operatorname{div} F.$$

Ainsi, par le théorème de Green,

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y) \, dx dy = \iint_{\Omega} \operatorname{rot} \Phi(x, y) \, dx dy = \int_{\partial\Omega} \Phi \cdot dl$$

De plus, si $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une paramétrisation qui laisse le domaine à gauche ($\partial\Omega$ est orienté positivement), on a

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \Phi \cdot dl &= \int_a^b \langle \Phi(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = \int_a^b \langle (-F_2(\gamma(t)), F_1(\gamma(t))), (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)) \rangle \, dt \\ &= \int_a^b F_1(\gamma(t))\gamma_2'(t) - F_2(\gamma(t))\gamma_1'(t) \, dt \end{aligned}$$

De plus, en utilisant la formule pour le calcul d'une intégrale curviligne de $\langle F, \nu \rangle$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, dl &= \int_a^b \langle (F_1(\gamma(t)), F_2(\gamma(t))), (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t)) \rangle \, dt \\ &= \int_a^b F_1(\gamma(t))\gamma_2'(t) - F_2(\gamma(t))\gamma_1'(t) \, dt = \int_{\partial\Omega} \Phi \cdot dl \end{aligned}$$

on a donc bien le résultat.

(ii) En appliquant le théorème de la divergence à $F = \nabla f$, on a

$$\iint_{\Omega} \Delta f(x, y) \, dx dy = \iint_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla f)(x, y) \, dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle \nabla f, \nu \rangle \, dl,$$

qui est le résultat voulu.

Exercice 2 (Ex 5.1 p. 56, corrigé p. 57).

Soient $f(x, y, z) = xy + z^2$ et

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}.$$

Calculer $\iint_{\Sigma} f ds$

Solution :

On passe en coordonnées cylindriques : $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ et $z \in \mathbb{R}$.

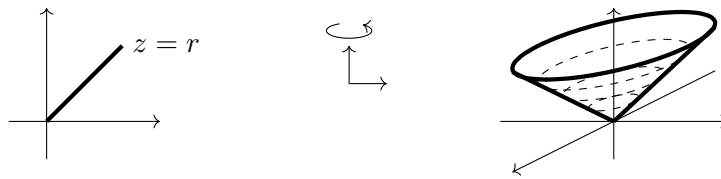
Nos conditions deviennent :

$$x^2 + y^2 = z^2 \Leftrightarrow r^2 = z^2 \Leftrightarrow r = |z| \stackrel{z \geq 0}{=} z$$

$$0 \leq z \leq 1 \text{ ne change pas.}$$

et donc une paramétrisation de la surface est donnée par $\sigma : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\sigma(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r).$$



De plus, on a alors

$$\begin{aligned} \sigma_r \wedge \sigma_\theta &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sigma_r^1 & \sigma_r^2 & \sigma_r^3 \\ \sigma_\theta^1 & \sigma_\theta^2 & \sigma_\theta^3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos \theta & \sin \theta & 1 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= e_1(-r \cos \theta) + e_2(-r \sin \theta) + e_3(r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta) \\ &= \begin{pmatrix} -r \cos \theta \\ -r \sin \theta \\ r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et donc,

$$\|\sigma_r \wedge \sigma_\theta\| = \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta + r^2} = \sqrt{2}r.$$

Pour finir,

$$\begin{aligned} f(\sigma(r, \theta)) &= r^2 \cos \theta \sin \theta + r^2 \\ \iint_{\Sigma} f ds &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 \cos \theta \sin \theta + r^2) \sqrt{2}r dr d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \cos \theta \sin \theta + r^3 dr d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \cos \theta \sin \theta + \frac{1}{4} d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta + \theta \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \end{aligned}$$

Exercice 3 (Ex 5.6 p. 57, corrigé p. 60).

Soit $0 < a < R$. Dans \mathbb{R}^3 on considère le tore Ω obtenu par rotation du disque $(x - R)^2 + z^2 \leq a^2$ autour de l'axe Oz et sa représentation décrite par

$$x = (R + r \cos \varphi) \cos \theta, \quad y = (R + r \cos \varphi) \sin \theta, \quad z = r \sin \varphi$$

avec $0 < r < a$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

- (i) Dessiner Ω et indiquer ce que représentent r , θ et φ .
- (ii) Calculer le Jacobien de la transformation qui décrit Ω en termes des variables r , θ et φ .
- (iii) Calculer le volume de Ω .
- (iv) Ecrire une paramétrisation régulière de la surface du tore (notée $\partial\Omega$) et calculer une normale à $\partial\Omega$.
- (v) Calculer l'aire de $\partial\Omega$.
- (vi) Calculer $\iiint_{\Omega} z^2 \, dx \, dy \, dz$

Solution :

- (i) Pour une représentation 3D de Ω voir <https://www.geogebra.org/calculator/ctqgfts5>
- (ii) La paramétrisation est $u: [0, a] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$u(r, \theta, \varphi) = ((R + r \cos \varphi) \cos \theta, (R + r \cos \varphi) \sin \theta, r \sin \varphi)$$

Ainsi, la matrice jacobienne de φ est

$$\nabla u(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -(R + r \cos \varphi) \sin \theta & -r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta & (R + r \cos \varphi) \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi & 0 & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

et donc le jacobien de u est

$$\begin{aligned} \det \nabla u(r, \theta, \varphi) &= r(R + \cos \varphi) \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + r(R + r \cos \varphi) \sin^2 \varphi \sin^2 \theta \\ &\quad + r(R + r \cos \varphi) \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r(R + r \cos \varphi) \cos^2 \varphi \sin^2 \theta \\ &= r(R + r \cos \varphi) (\cos^2 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \sin^2 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)) \\ &= r(R + r \cos \varphi) \end{aligned}$$

Remarquons que vu que $0 \leq r \leq a \leq R$ et $\cos \varphi \in [-1, 1]$, on a que $R + r \cos \varphi \geq 0$ et donc

$$|\det \nabla u(r, \theta, \varphi)| = r(R + r \cos \varphi)$$

- (iii) On a

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r \cos \varphi) d\theta d\varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^a [r(R\varphi + r \sin \varphi)]_0^{2\pi} = 4\pi^2 R \frac{a^2}{2} = 2\pi^2 R a^2. \end{aligned}$$

- (iv) La paramétrisation de la surface du tore consiste à fixer $r = a$. Ainsi, $\sigma: [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est définie par

$$\sigma(\theta, \varphi) = u(a, \theta, \varphi) = ((R + a \cos \varphi) \cos \theta, (R + a \cos \varphi) \sin \theta, a \sin \varphi)$$

et on a

$$\sigma_\theta(\theta, \varphi) = (-(R + a \cos \varphi) \sin \theta, (R + a \cos \varphi) \cos \theta, 0)$$

$$\sigma_\varphi(\theta, \varphi) = (-a \sin \varphi \cos \theta, -a \sin \varphi \sin \theta, a \cos \varphi)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -(R + a \cos \varphi) \sin \theta & (R + a \cos \varphi) \cos \theta & 0 \\ -a \sin \varphi \cos \theta & -a \sin \varphi \sin \theta & a \cos \varphi \end{vmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(R + a \cos \varphi) \cos \varphi \cos \theta \\ a(R + a \cos \varphi) \cos \varphi \sin \theta \\ a(R + a \cos \varphi) \sin \varphi \sin^2 \theta + a(R + a \cos \varphi) \sin \varphi \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= a(R + a \cos \varphi) \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

qui est un vector normal à la surface.

(v) On a

$$\begin{aligned} |\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi| &= a(R + a \cos \varphi) \sqrt{\cos^2 \varphi \cos^2 \theta + \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \sin^2 \varphi} = a(R + a \cos \varphi) \\ \text{Aire}(\partial\Omega) &= \iint_{\partial\Omega} ds = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a(R + a \cos \varphi) d\theta d\varphi \\ &= 2\pi [a(R\varphi + a \sin \varphi)]_0^{2\pi} = 4\pi^2 aR \end{aligned}$$

(vi) On a

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 \varphi \cdot r(R + r \cos \varphi) d\theta d\varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^a \int_0^{2\pi} Rr^3 \sin^2 \varphi + r^3 \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi dr \end{aligned}$$

En utilisant que

$$\begin{aligned} \int \sin^2 \varphi d\varphi &= \frac{1}{2} (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) \\ \int \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi &= \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \end{aligned}$$

ou, en utilisant les formules d'Euler :

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi &= \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right)^2 = -\frac{e^{i2\varphi} - 2 + e^{-i2\varphi}}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \\ \int \sin^2 \varphi d\varphi &= \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \\ \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi &= \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right)^2 \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = -\frac{e^{i2\varphi} - 2 + e^{-i2\varphi}}{4} \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \\ &= -\frac{1}{8} (e^{i3\varphi} - 2e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} + e^{i\varphi} - 2e^{-i\varphi} + e^{-i3\varphi}) \\ &= -\frac{1}{8} (e^{i3\varphi} + e^{-i3\varphi} - e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) \\ &= \frac{1}{4} \cos \varphi - \frac{1}{4} \cos(3\varphi) \\ \int \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi &= \frac{1}{4} \sin \varphi - \frac{1}{12} \sin(3\varphi) \end{aligned}$$

Ainsi, reprenant notre calcul

$$\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = 2\pi \int_0^a \left[Rr^3 \frac{1}{2} (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) + r^3 \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right]_0^{2\pi} = 2\pi^2 R \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi^2 R a^4}{2}$$

Les exercices suivants sont une révision d'analyse II

Exercice 4. (i) Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\}$.

Calculer $\iint_D \sqrt{1-x-y} dx dy$

(ii) Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2(x + \sqrt{x^2 + y^2})\}$.

Calculer $\iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{4}}}$

Indication : Ne pas essayer de faire un dessin. De plus, on pourra utiliser que $2 \cos^2(\theta/2) = 1 + \cos(\theta)$.

(iii) Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, z \leq 1 - y^2 \text{ et } x + y \leq 1\}$.

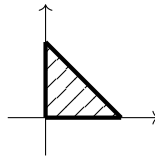
Indication : Si un dessin est faisable, ça n'aide pas beaucoup à l'exercice.

Calculer $\iiint_D z dx dy dz$

Solution :

(i) D_1 est le triangle de sommets $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$. On peut le paramétrer par

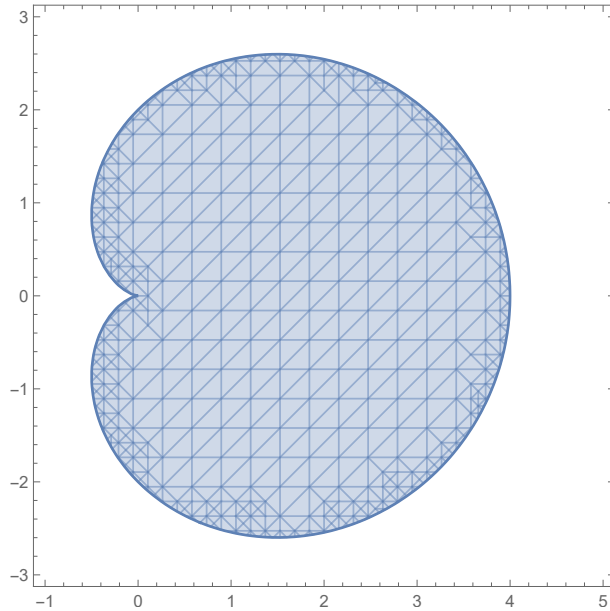
$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y \in [0, 1-x]\}$$



$$\begin{aligned} \iint_{D_1} \sqrt{1-x-y} dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \sqrt{1-x-y} dy \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{2}{3} (1-x-y)^{3/2} \Big|_{y=0}^{y=1-x} \right) dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 (1-x)^{3/2} dx = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{2}{5} (1-x)^{5/2} \Big|_{x=0}^{x=1} \right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}. \end{aligned}$$

(ii) Pour paramétrer D_2 , nous utilisons les coordonnées polaires, $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, avec $\theta \in [0, 2\pi]$ et $r \in [0, 2(1 + \cos \theta)]$. En effet, observer que

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq 2 \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \Leftrightarrow 0 \leq r \leq 2(1 + \cos \theta).$$



Rappelons que pour les coordonnées polaires, le jacobien est r .

$$\iint_{D_2} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{4}}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2(1+\cos\theta)} \frac{1}{r^{3/2}} r dr = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2(1+\cos\theta)} d\theta$$

en utilisant l'identité trigonométrique $1 + \cos \theta = 2 \cos^2(\theta/2)$, on trouve

$$\begin{aligned} &= 4 \int_0^{2\pi} |\cos(\theta/2)| d\theta = 4 \int_0^{\pi} \cos(\theta/2) d\theta - 4 \int_{\pi}^{2\pi} \cos(\theta/2) d\theta \\ &= 8 \sin(\theta/2) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} - 8 \sin(\theta/2) \Big|_{\theta=\pi}^{\theta=2\pi} = 16. \end{aligned}$$

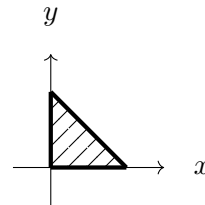
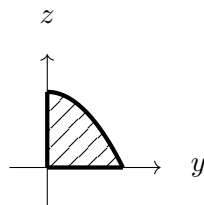
(iii) On a $D_3 = E_1 \cap E_2$ avec

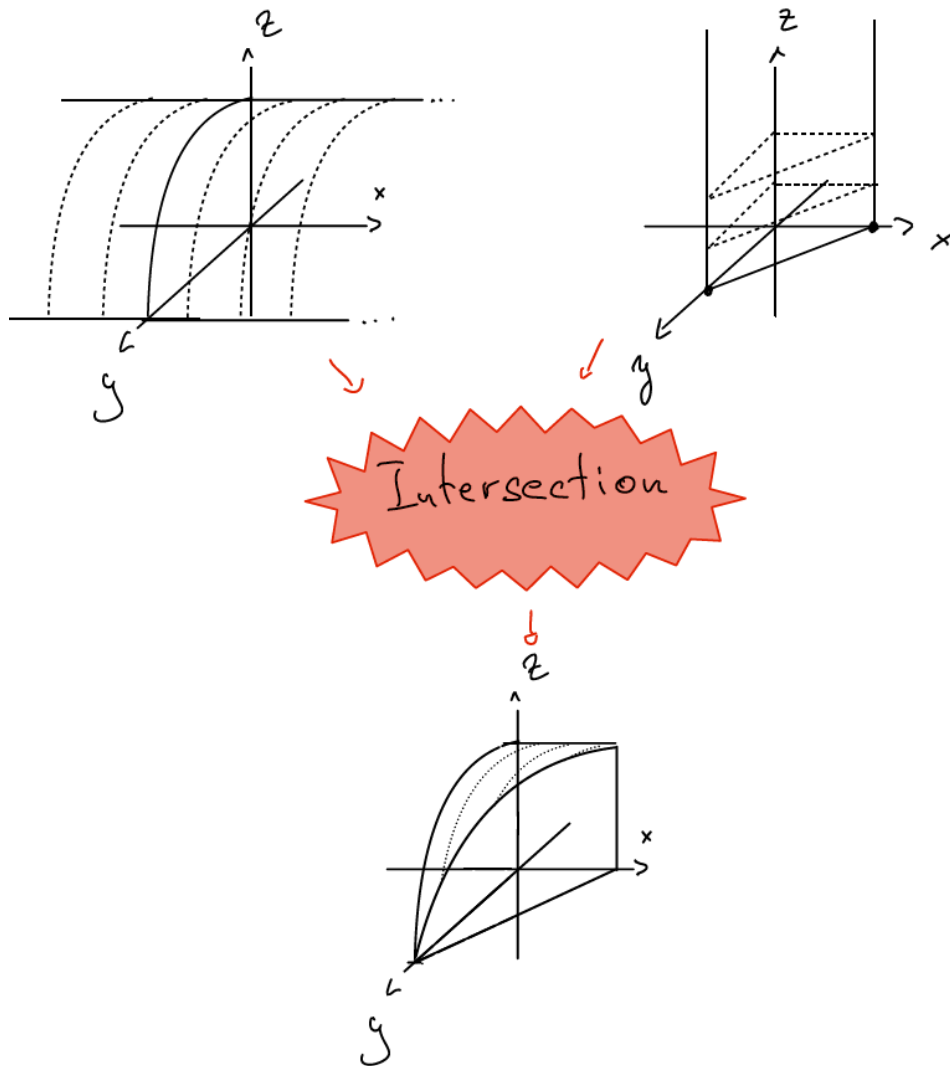
$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, z \leq 1 - y^2\}$$

$$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, \text{ et } x + y \leq 1\}$$

E_1 dans le plan $x = 0$

E_2 dans le plan $z = 0$





$$D_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [0, 1], y \in [0, 1-x], z \in [0, 1-y^2]\}.$$

$$\begin{aligned} \iiint_{D_3} z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-y^2} z \, dz = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-y^2)^2 dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(y - \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 \Big|_{y=0}^{y=1-x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left((1-x) - \frac{2}{3}(1-x)^3 + \frac{1}{5}(1-x)^5 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}(1-x)^2 + \frac{1}{6}(1-x)^4 - \frac{1}{30}(1-x)^6 \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{11}{60}. \end{aligned}$$

Exercice 5.

Calculer le volume de :

(i) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 \leq z\}.$

(ii) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq \sqrt{2}, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } z \geq 0\}.$

Suggestion : Selon la méthode utilisée, la primitive suivante peut être utile (qu'on trouve avec

le changement de variables $x = \cos(t)$:

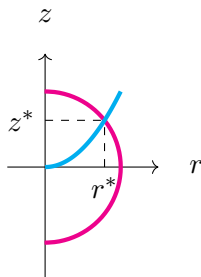
$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{1-x^2} - \arccos(x)).$$

Solution :

(i) On passe en coordonnées cylindriques : $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$.
Nos conditions deviennent

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 &\Leftrightarrow r^2 + z^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \leq z &\Leftrightarrow r^2 \leq z \end{aligned}$$

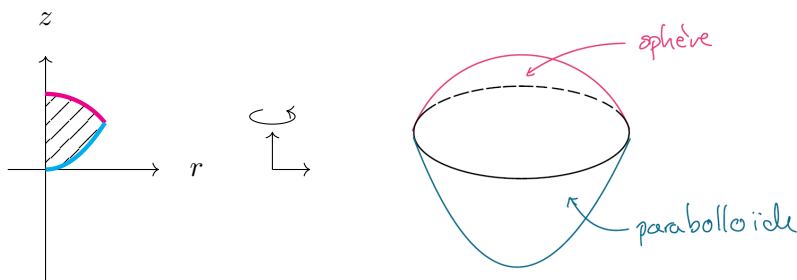
Le dessin dans le plan r, z :



Les coordonnées du point (r^*, z^*) sont les coordonnées de l'intersection des deux courbes $r^2 + z^2 = 1$ et $r^2 = z$

$$\begin{cases} r^2 + z^2 = 1 \\ r^2 = z \end{cases} \Rightarrow z^2 + z - 1 = 0 \Rightarrow z^* = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

vu que $z^* = r^2 \geq 0$, on déduit $z^* = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $r^* = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. En effet, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$.



Variante 1 : Le tout en coordonnées cylindriques, z -simple.

On paramétrise D en coordonnées cylindriques

$$D = \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : \theta \in [0, 2\pi], r \in \left[0, \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \right], r^2 \leq z \leq \sqrt{1-r^2} \right\}$$

Ainsi, vu que le jacobien des coordonnées cylindriques est r , on a

$$\begin{aligned}
\text{Volume}(D) &= \iiint_D 1 dx dy dz \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \int_{r^2}^{\sqrt{1-r^2}} r dz dr d\theta \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} r \sqrt{1-r^2} - r^3 dr \\
&= 2\pi \left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}r^4 \right]_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \\
&= 2\pi \left(-\frac{1}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{16} (6-2\sqrt{5}) \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8} (3-\sqrt{5}) \right) \\
&= \frac{2\pi}{24} \left(8 - 8 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - 3(3-\sqrt{5}) \right) \\
&= \frac{\pi}{12} \left(3\sqrt{5} - 1 - 8 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right).
\end{aligned}$$

On pourrait s'arrêter là. Néanmoins, vu que $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{\frac{3}{2}} &= \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^3} = \sqrt{\frac{27-27\sqrt{5}+45-5\sqrt{5}}{8}} \\
&= \sqrt{\frac{72-32\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{2^2-2 \cdot 2\sqrt{5} + \sqrt{5}^2} \\
&= \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2
\end{aligned}$$

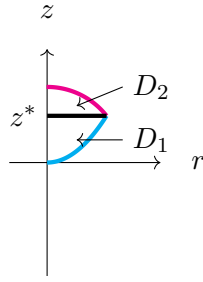
et donc

$$\text{Volume}(D) = \frac{\pi}{12} (3\sqrt{5} - 1 - 8(\sqrt{5}-2)) = \frac{\pi}{12} (15 - 5\sqrt{5}) = \frac{5\pi}{12} (3 - \sqrt{5}).$$

Variante 2 : Le tout en coordonnées cylindriques, découpage r -simple.

On a $D = D_1 \cup D_2$ avec

$$\begin{aligned}
D_1 &= \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : \theta \in [0, 2\pi], z \in \left[0, \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right], 0 \leq r \leq \sqrt{z} \right\} \\
D_2 &= \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : \theta \in [0, 2\pi], z \in \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1 \right], 0 \leq r \leq \sqrt{1-z^2} \right\}
\end{aligned}$$



On calcule (on rappelle le que jacobien des coordonnées cylindriques est r) :

$$\begin{aligned}
 \text{Volume}(D_1) &= \iiint_{D_1} 1 dx dy dz \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \int_0^{\sqrt{z}} r dr dz d\theta \\
 &= 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^{r=\sqrt{z}} dz \\
 &= \pi \int_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} z dz \\
 &= \pi \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \\
 &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{\pi}{8} (6 - 2\sqrt{5}) \\
 &= \frac{\pi}{4} (3 - \sqrt{5})
 \end{aligned}$$

et

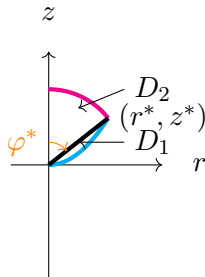
$$\begin{aligned}
 \text{Volume}(D_2) &= \iiint_{D_1} 1 dx dy dz \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} r dr dz d\theta \\
 &= 2\pi \int_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}^1 \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^{r=\sqrt{1-z^2}} dz \\
 &= \pi \int_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}^1 1 - z^2 dz \\
 &= \pi \left[z - \frac{1}{3} z^3 \right]_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}^1 \\
 &= \pi \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^3 \right) \\
 &= \pi \left(\frac{2}{3} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{5\sqrt{5}-1-15+3\sqrt{5}}{24} \right) \\
 &= \pi \left(\frac{2}{3} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{8\sqrt{5}-16}{24} \right) \\
 &= \pi \left(\frac{2}{3} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-2}{3} \right) \\
 &= \frac{\pi}{6} (4 + 3 - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 4) \\
 &= \frac{\pi}{6} (3 - \sqrt{5})
 \end{aligned}$$

Pour finir,

$$\begin{aligned}
 \text{Volume}(D) &= \text{Volume}(D_1) + \text{Volume}(D_2) = \frac{\pi}{4} (3 - \sqrt{5}) + \frac{\pi}{6} (3 - \sqrt{5}) \\
 &= \frac{5\pi}{12} (3 - \sqrt{5})
 \end{aligned}$$

Variante 3 : Mi-sphérique, mi-cylindrique.

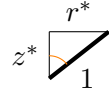
Si on découpe le domaine de la façon suivante :



la partie supérieure peut être reparamétrisée en coordonnées sphériques. tandis que pour la partie inférieure, on peut la paramétrer avec $r^2 \leq z \leq \frac{z^*}{r^*} r$ ou $\frac{r^*}{z^*} z \leq r \leq \sqrt{z}$.

Pour ceci, il nous faut trouver l'angle φ qui est l'angle maximum pour φ dans les coordonnées sphériques.

Vu qu'on connaît les coordonnées de (r^*, z^*) , on essaie de trouver l'angle φ^* avec un peu de trigonométrie.



$$\cos(\varphi^*) = \frac{z^*}{1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\sin(\varphi^*) = \frac{r^*}{1} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

$$\tan(\varphi^*) = \frac{r^*}{z^*} = \frac{1}{r^*} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}-1}}$$

qui n'est pas un angle remarquable... Mais bon, on peut quand même essayer de faire le calcul, car même si on connaît pas φ^* , on connaît son cosinus, son sinus et sa tangente, et peut-être que ça suffit. (C'est dangereux, n'essayez ceci examen qu'en cas de dernier recours)

Enfin, on utilise que $D = D_1 \cup D_2$ avec

$$D_1 = \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : \theta \in [0, 2\pi], r \in \left[0, \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right], r^2 \leq z \leq \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} r \right\}$$

$$D_2 = \left\{ (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) \in \mathbb{R}^3 : \theta \in [0, 2\pi], r \in [0, 1], \varphi \in [0, \varphi^*] \right\}$$

Ainsi, en utilisant que le jacobien des coordonnées cylindriques est r ,

$$\begin{aligned} \text{Volume}(D_1) &= \iiint_{D_1} 1 dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \int_{r^2}^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} r} r dz dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \left[\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} r^2 - r^3 \right] dr \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{3} \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} r^3 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^2 \right) \\ &= \frac{\pi}{6} \frac{6-2\sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{\pi}{12} (3-\sqrt{5}) \end{aligned}$$

et en utilisant que le jacobien des coordonnées sphériques est $r^2 \sin \varphi$, on a

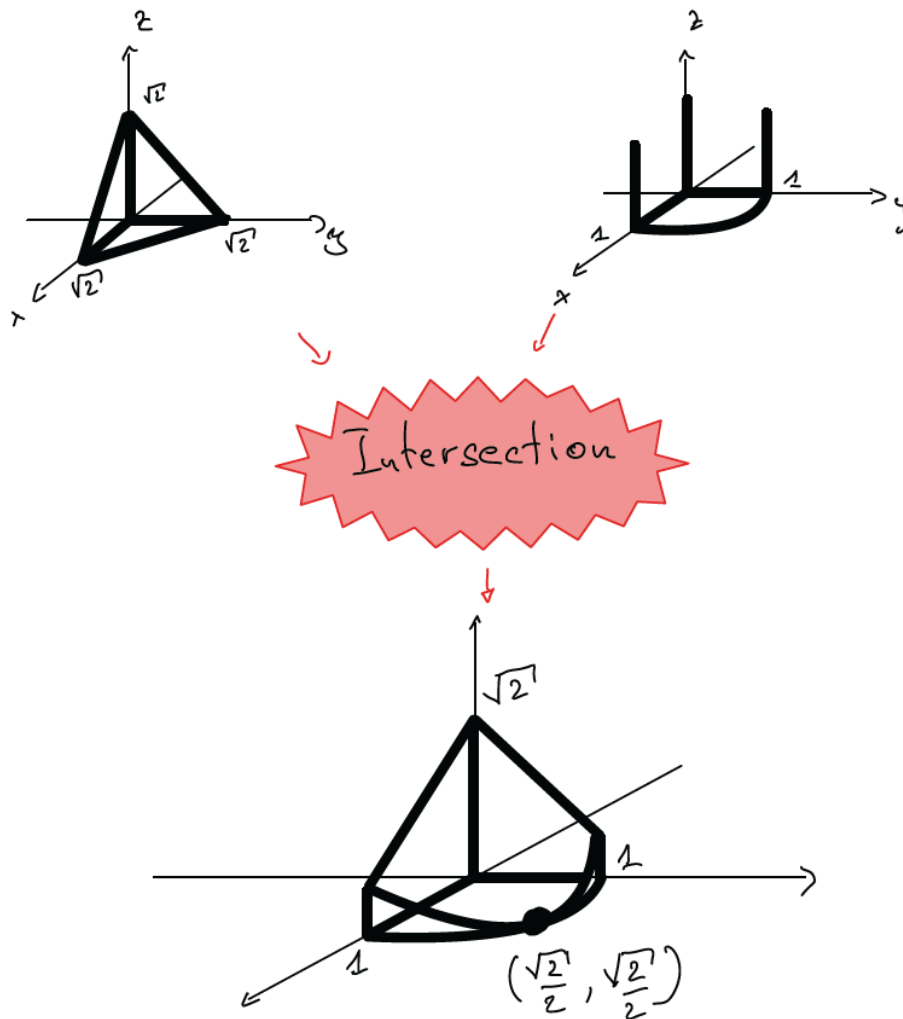
$$\begin{aligned}
 \text{Volume}(D_2) &= \iiint_{D_2} 1 dx dy dz \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\varphi^*} r^2 \sin \varphi d\varphi dr d\theta \\
 &= \frac{2\pi}{3} (-\cos(\varphi^*) + 1) \\
 &= \frac{2\pi}{3} \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 \right) \\
 &= \frac{2\pi}{3} \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\
 &= \frac{\pi}{3} (3-\sqrt{5})
 \end{aligned}$$

On conclut

$$\begin{aligned}
 \text{Volume}(D) &= \text{Volume}(D_1) + \text{Volume}(D_2) \\
 &= \frac{\pi}{12} (3-\sqrt{5}) + \frac{\pi}{3} (3-\sqrt{5}) = \frac{5\pi}{12} (3-\sqrt{5})
 \end{aligned}$$

(ii) On a $D = E_1 \cap E_2$ avec

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z, x + y + z \leq \sqrt{2} \right\} \\
 E_2 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z, x^2 + y^2 \leq 1 \right\}
 \end{aligned}$$



Intersection

Variante 1 : En coordonnées cartésiennes.

On propose qu'une seule façon d'encadrer nos différentes variables (il y en a d'autres) :

$$\alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y), \quad \gamma(x) \leq y \leq \delta(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Nos différentes conditions sont :

$$x + y + z \leq \sqrt{2}, \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \text{ et } z \geq 0$$

on considère celles qui font intervenir z : $0 \leq z \leq \sqrt{2} - x - y$.

On obtient une nouvelle condition par transitivité : $0 \leq \sqrt{2} - x - y$.

Nos différentes conditions deviennent

$$x + y \leq \sqrt{2}, \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

on considère celles qui font intervenir y :

$$0 \leq y$$

$$x + y \leq \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow y \leq \sqrt{2} - x$$

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$$

on déduit

$$\max \{0, -\sqrt{1-x^2}\} \leq y \leq \min \{\sqrt{2}-x, \sqrt{1-x^2}\}$$

or, $\max\{0, -\sqrt{1-x^2}\} = 0$

Si $x \geq \sqrt{2}$, on a $\min\{\sqrt{2}-x, \sqrt{1-x^2}\} = \sqrt{2}-x$ (ceci n'est jamais le cas, car on a besoin que $0 \leq \sqrt{2}-x$ par transitivité.)

Si $x \leq \sqrt{2}$, on a $0 \leq \sqrt{2}-x, \sqrt{1-x^2}$ et donc l'ordre entre $\sqrt{2}-x$ et $\sqrt{1-x^2}$ est le même que celui entre $(\sqrt{2}-x)^2$ et $1-x^2$. Or, $(\sqrt{2}-x)^2 = 2 - 2\sqrt{2}x + x^2$.

Montrons que $1-x^2 \leq 2-2\sqrt{2}x+x^2$, i.e. $2x^2-2\sqrt{2}x+1 \geq 0$. Or, le discriminant de ce polynome est $\Delta = 8-8=0$ qui a donc une seule racine et est toujours du même signe (positif, vu que le terme de plus haut degré est positif.)

Pour finir,

$$0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}.$$

On obtient implicitement la condition $-1 \leq x \leq 1$ et il nous reste les conditions

$$x \geq 0, \quad -1 \leq x \leq 1$$

et donc $0 \leq x \leq 1$. Pour finir,

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [0, 1], 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq z \leq \sqrt{2}-x-y\}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Volume}(D) &= \iiint_D 1 dx dy dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{2}-x-y} 1 dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{2}-x-y dy dx \\ &= \int_0^1 \left[\sqrt{2}y - xy - \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{2}\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}(1-x^2) dx \\ &= \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (x\sqrt{1-x^2} - \arccos(x)) + \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{x}{2} + \frac{1}{6}x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{4} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Variante 2 : Coordonnées cylindriques

On pose $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ avec $r \geq 0, \theta \in [-\pi, \pi], z \in \mathbb{R}$.

Nos conditions deviennent

$$\begin{aligned} x+y+z \leq \sqrt{2} &\Leftrightarrow r \cos \theta + r \sin \theta + z \leq \sqrt{2} \\ x^2+y^2 \leq 1 &\Leftrightarrow 0 \leq r \leq 1 \\ x \geq 0 &\Leftrightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ y \geq 0 &\Leftrightarrow \theta \in [0, \pi] \\ z \geq 0 &\Leftrightarrow \text{change pas.} \end{aligned}$$

et donc, on a

$$D = \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], r \in [0, 1], 0 \leq z \leq \sqrt{2} - r \cos \theta - r \sin \theta \right\}$$

Observons tout de même que pour tout $0 \leq r \leq 1$ et $0 \leq \theta \leq \pi/2$, la quantité $\sqrt{2} - r \cos \theta - r \sin \theta \geq 0$, avec égalité si et seulement si $r = 1$ et $\theta = \pi/4$.

Ainsi, vu que le jacobien des coordonnées cylindriques est r , on calcule

$$\begin{aligned} \text{Volume}(D) &= \iiint_D 1 dx dy dz \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2}-r \cos \theta - r \sin \theta} r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sqrt{2}r - r^2 \cos \theta - r^2 \sin \theta dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} \cos \theta - \frac{1}{3} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{4} + \frac{1}{3} [-\sin \theta + \cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{4} - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Démonstration de la suggestion : (pour les curieux · x · ses)

En utilisant que pour $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{d}{dx} [\arccos(x)] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \left(x\sqrt{1-x^2} - \arccos(x) \right) \right] &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{1-x^2} + x \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left[\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right] + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1-x^2-x^2+1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

On trouve la primitive de la façon suivante :

$$\int^x \sqrt{1-t^2} dt = \int^{\arccos(x)} \sqrt{1-\cos^2(y)} (-\sin(y)) dy$$

$$\left| \begin{array}{l} t = \cos(y) \\ y = \arccos(t) \\ dt = -\sin(y) dy \end{array} \right.$$

$$= - \int^{\arccos(x)} \sqrt{\sin^2(y)} \sin(y) dx$$

$$= - \int^{\arccos(x)} \sin^2(y) dy$$

$$= - \left[\frac{1}{2} (y - \sin(y) \cos(y)) \right]^{\arccos(x)}$$

$$= \frac{1}{2} (\sin(\arccos(x)) \cos(\arccos(x)) - \arccos(x))$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))} x - \arccos(x) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1-x^2} - \arccos(x) \right)$$