

Exercice 1 (ex 4.1 et 4.2 p. 41, corrigé p. 44).

Vérifier le théorème de Green dans les cas suivants :

(i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ et $F(x, y) = (xy, y^2)$

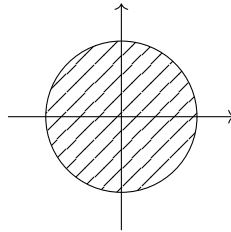
(ii) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ et $F(x, y) = (x + y, y^2)$.

Solution :

(i) *Calcul rotationnel :* On a

$$\text{rot } F(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} [y^2] - \frac{\partial}{\partial y} [xy] = -x.$$

Paramétrisation du domaine :



On passe en coordonnées polaires : $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Notre condition devient $x^2 + y^2 < 1 \Leftrightarrow r < 1$.

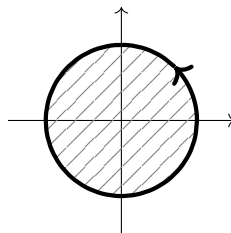
Calcul $\iint_A \text{rot } F dx dy :$

Le jacobien des coordonnées polaires est r , et donc,

$$\begin{aligned} \iint \text{rot } F dx dy &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \text{rot } F(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} -r^2 \cos \theta d\theta dr \\ &= - \int_0^1 r^2 dr \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = - \left[\frac{1}{3} r^3 \right] [-\sin \theta]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Paramétrisation du bord :

Le bord est le cercle centré en $(0, 0)$ de rayon 1. On paramétrise avec $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.



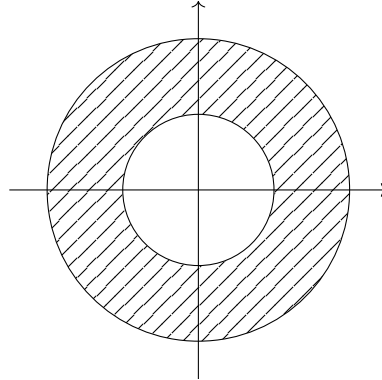
Cette paramétrisation laisse le domaine à gauche et on a

$$\begin{aligned} F(\gamma(t)) &= (\cos t \sin t, \sin^2 t) \\ \gamma'(t) &= (-\sin t, \cos t) \\ \int_{\partial A} F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t), \gamma'(t)) \rangle dt = \int_0^{2\pi} \langle (\cos t \sin t, \sin^2 t), (-\sin t, \cos t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\cos t \sin^2 t + \cos t \sin^2 t dt = \int_0^{2\pi} 0 dt = 0 \end{aligned}$$

(ii) Calcul rotationnel : On a

$$\operatorname{rot} F(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} [y^2] - \frac{\partial}{\partial y} [x + y] = -1$$

Paramétrisation domaine :



Le domaine est l'anneau centré en $(0, 0)$ entre les rayons $r = 1$ et $r = 2$. On passe en coordonnées polaires, et notre condition devient $1 < x^2 + y^2 < 4 \Leftrightarrow 1 < r < 2$.

Calcul $\iint_A \operatorname{rot} F(x, y) dx dy$:

Le jacobien des coordonnées polaires est r et donc

$$\begin{aligned} \iint_A \operatorname{rot} F(x, y) dx dy &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{rot} F(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr = \int_1^2 -r d\theta dr \\ &= -2\pi \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_1^2 = -2\pi \left(2 - \frac{1}{2} \right) = -3\pi. \end{aligned}$$

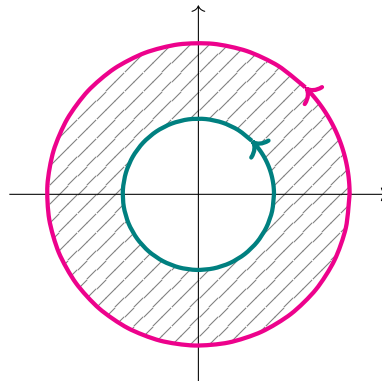
Alternativement, vu que $\operatorname{rot} F$ est constant, on a que

$$\begin{aligned} \iint_A \operatorname{rot} F(x, y) dx dy &= \operatorname{rot} F \operatorname{aire}(A) = -(\operatorname{aire} B((0, 0), 2) - \operatorname{aire} B((0, 0), 1)) \\ &= -(\pi \cdot 4 - \pi) = -3\pi. \end{aligned}$$

Paramétrisation ∂A :

Le bord a deux parties : $\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, le cercle centré en $(0, 0)$ de rayon 1 et $\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$ le cercle centré en $(0, 0)$ de rayon 2, qu'on paramétrise respectivement par

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (\cos t, \sin t) & t \in [0, 2\pi] \\ \gamma_2(t) &= (2 \cos t, 2 \sin t) & t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$



On voit que γ_1 laisse le domaine à droite et est donc orientée négativement, tandis que γ_2 laisse le domaine à gauche et est donc orientée positivement. On a donc

$$\begin{aligned} F(\gamma_1(t)) &= (\cos t + \sin t, \sin^2 t) && \ominus \\ \gamma_1'(t) &= (-\sin t, \cos t) \\ \int_{\Gamma_1} F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma_1(t)), \gamma_1'(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} \langle (\cos t + \sin t, \sin^2 t), (-\sin t, \cos t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\cos t \sin t - \sin^2 t + \sin^2 t \cos t dt \\ &= \left[\frac{1}{2} \cos^2 t - \frac{1}{2} (t - \sin t \cos t) + \frac{1}{3} \sin^3 t \right]_0^{2\pi} = -\pi \end{aligned}$$

Alternativement, on peut calculer les primitives des fonctions trigonométriques en utilisant les formules d'Euler :

$$\begin{aligned} \cos t \sin t &= \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{1}{2} \frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i} = \frac{1}{2} \sin(2t) && \oplus \\ \int \cos t \sin t dt &= -\frac{1}{4} \cos(2t) \\ \sin^2 t &= \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^2 = -\frac{e^{2it} + e^{-2it} - 2}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t) \\ \int \sin^2 t dt &= \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin(2t) \\ \sin^2 t \cos t &= -\frac{(e^{2it} + e^{-2it} - 2)(e^{it} + e^{-it})}{8} = -\frac{e^{3it} + e^{it} + e^{-it} + e^{-3it} - 2e^{it} - 2e^{-it}}{8} \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{e^{3it} + e^{-3it}}{2} - \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right) = \frac{1}{4} \cos(t) - \frac{1}{4} \cos(3t) \\ \int \sin^2 t \cos t dt &= \frac{1}{4} \sin(t) - \frac{1}{12} \sin(3t) \end{aligned}$$

Reprenons notre calcul,

$$\begin{aligned} F(\gamma_2(t)) &= (2 \cos t + 2 \sin t, 4 \sin^2 t) \\ \gamma_2'(t) &= (-2 \sin t, 2 \cos t) \\ \int_{\Gamma_2} F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} \langle (2 \cos t + 2 \sin t, 4 \sin^2 t), (-2 \sin t, 2 \cos t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} -4 \cos t \sin t - 4 \sin^2 t + 8 \sin^2 t \cos t dt \\ &= \left[2 \cos(t) - 2(t - \sin t \cos t) + \frac{8}{3} \sin^3(t) \right]_0^{2\pi} = -4\pi \end{aligned}$$

Et pour finir,

$$\int_{\partial A} F \cdot dl = - \int_{\Gamma_1} F \cdot dl + \int_{\Gamma_2} F \cdot dl = \pi - 4\pi = -3\pi$$

Exercice 2 (ex 4.4i et 4.5 p. 42, corrigé p. 46).

Vérifier le théorème de Green dans les cas suivants :

- (i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 < 1\}$ et $F(x, y) = (-x^2 y, xy^2)$
- (ii) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1 \text{ et } x^2 - 4 < y < 2\}$ et $F(x, y) = (xy, y)$.

Indication : Il sera difficile de paramétrer le domaine avec une seule paramétrisation. Essayez de dessiner le domaine A puis, vous avez deux options :

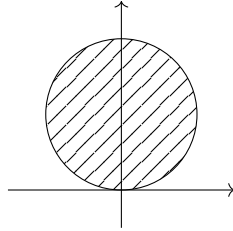
- Calculer $\iint_A \text{rot } F(x, y) dx dy$ comme une intégrale moins une autre. (Recommandé car plus rapide)
- Séparer le domaine en quatre parties x -simples ou y -simples. (Pas recommandé car plus long)

Solution :

(i) *Calcul rotationnel :* On a

$$\text{rot } F(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} [xy^2] - \frac{\partial}{\partial y} [-x^2y] = x^2 + y^2$$

Paramétrisation A :



On passe en coordonnées polaires centrées en $(0, 1)$: $(x, y) = (r \cos \theta, 1 + r \sin \theta)$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$.
Notre condition devient $x^2 + (y - 1)^2 < 1 \Leftrightarrow r < 1$.

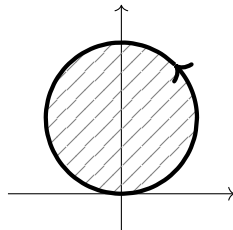
Calcul $\iint_A \text{rot } F(x, y) dx dy$:

Le jacobien des coordonnées polaires est r et donc,

$$\begin{aligned} \iint_A \text{rot } F(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \text{rot } F(r \cos \theta, 1 + r \sin \theta) r d\theta dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \cos^2 \theta + r(1 + r \sin \theta)^2 d\theta dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 2r^2 \sin \theta + r d\theta dr \\ &= \int_0^1 2\pi r^3 + 2r^2 \underbrace{[\cos \theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}}_{=0} + 2\pi r dr \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{4} r^4 + \frac{1}{2} r^2 \right]_0^1 = \frac{3}{2} \pi. \end{aligned}$$

Paramétrisation ∂A :

Le bord de A est le cercle de rayon 1 centré en $(0, 1)$ qu'on paramétrise avec $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.



Cette paramétrisation laisse le domaine à gauche et est donc orientée positivement.

Calcul $\int_{\partial A} F \cdot dl$:

On a,

$$\begin{aligned}
 F(\gamma(t)) &= (-\cos^2 t - \cos^2 t \sin t, \cos t + 2 \cos t \sin t + \cos t \sin^2 t) \\
 \gamma'(t) &= (-\sin t, \cos t) \\
 \int_{\partial A} F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} \langle (-\cos^2 t - \cos^2 t \sin t, \cos t + 2 \cos t \sin t + \cos t \sin^2 t), (-\sin t, \cos t) \rangle dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin t + \cos^2 t \sin^2 t + \cos^2 t + 2 \cos^2 t \sin t + \cos^2 t \sin^2 t dt \\
 &= \int_0^{2\pi} 3 \cos^2 t \sin t + 2 \cos^2 t \sin^2 t + \cos^2 t dt
 \end{aligned}$$

On trouve la primitive de $\cos^2 t \sin^2 t$ et $\cos^2 t$ à l'aide des formules d'euler :

$$\begin{aligned}
 \cos^2 t \sin^2 t &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^2 \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^2 \\
 &= \frac{-1}{16} \left((e^{it} + e^{-it}) (e^{it} - e^{-it}) \right)^2 \\
 &= \frac{-1}{16} (e^{2it} - e^{-2it})^2 \\
 &= \frac{-1}{16} (e^{4it} - 2 + e^{-4it}) \\
 &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \frac{e^{4it} + e^{-4it}}{2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos(4t) \\
 \int \cos^2 t \sin^2 t dt &= \frac{t}{8} - \frac{1}{32} \sin(4t) \\
 \cos^2 t &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{2it} + 2 + e^{-2it}) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2} \\
 \int \cos^2 t dt &= \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin(2t)
 \end{aligned}$$

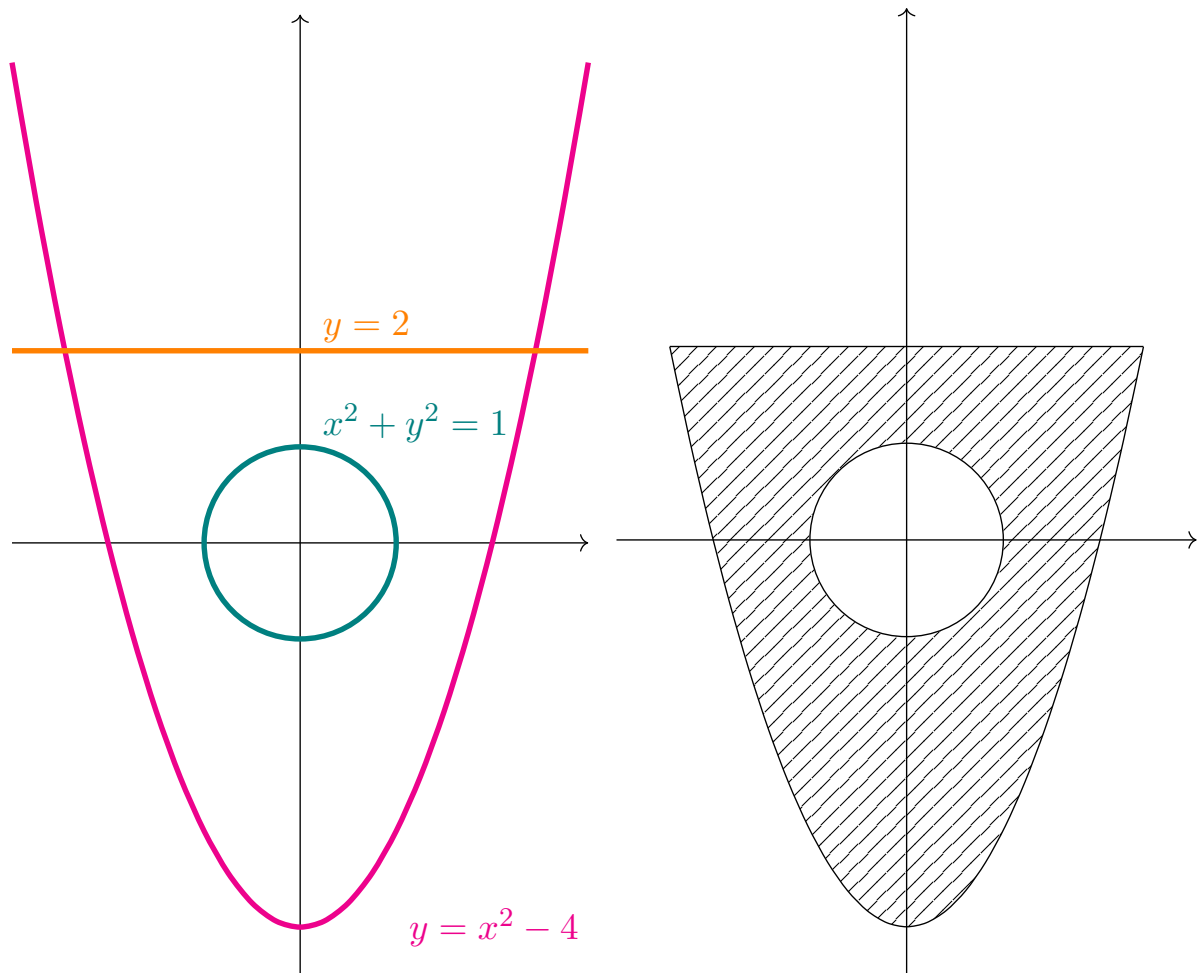
Enfin,

$$\int_{\partial A} F \cdot dl = \left[-\cos^3 t + \frac{t}{4} - \frac{1}{16} \sin(4t) + \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin(2t) \right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}$$

(ii) Calcul du rotationnel de F :

$$\operatorname{rot} F(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} [y] - \frac{\partial}{\partial y} [xy] = -x.$$

Paramétrisation A et calcul $\iint_A \operatorname{rot} F(x, y) dx dy$:



Pour calculer l'intégrale, on va donc calculer celle sur

$$A_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4 \leq y \leq 2\}$$

qui est y -simple et on retranchera l'intégrale sur le disque au centre

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

Attention à bien vérifier que le disque ne touche pas les autres courbes mathématiquement également. Particulièrement lorsqu'on dessine les choses à la main, chercher les points d'intersection est important :

L'intersection entre $y = 2$ et $y = x^2 - 4$

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = x^2 - 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 4 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$$

et donc les deux courbes se croisent en $(-\sqrt{6}, 2)$ et $(\sqrt{6}, 2)$.

L'intersection entre $y = x^2 - 4$ et $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ 1 = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow 1 = y + 4 + y^2 \Rightarrow y^2 + y + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 12}}{2}$$

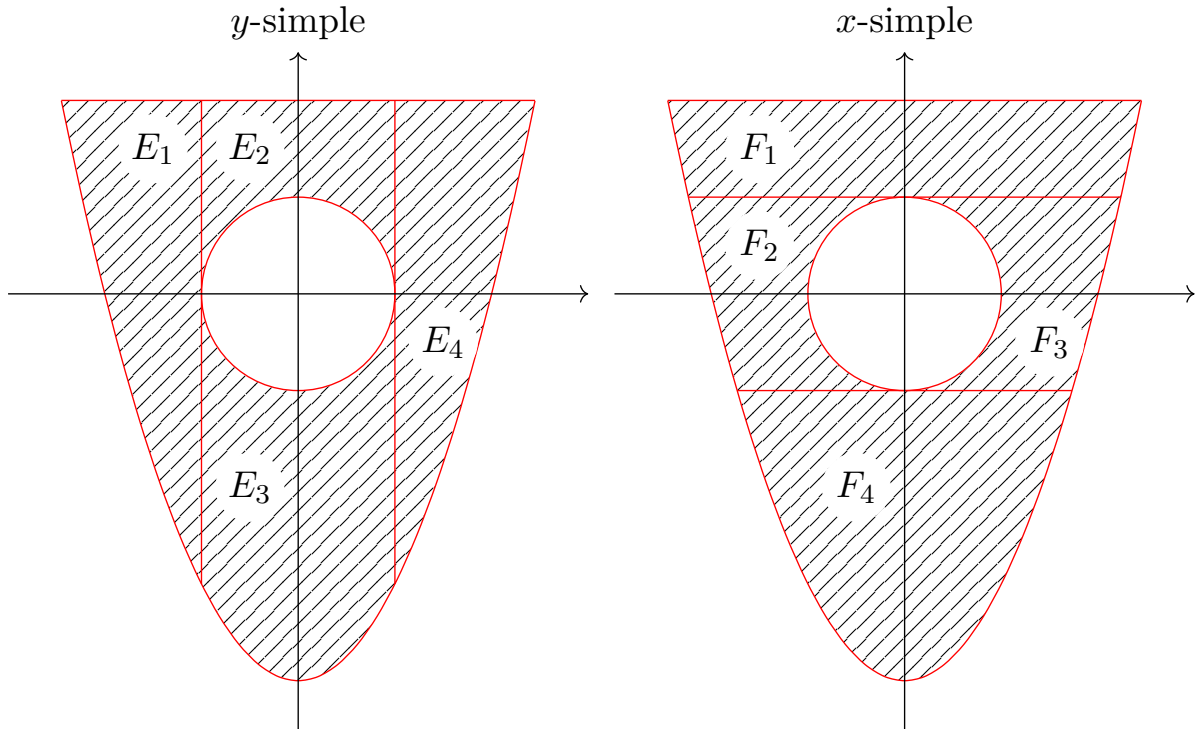
qui n'a pas de solution et donc les courbes ne se croisent pas.

L'intersection entre $x^2 + y^2 = 1$ et $y = 2$

$$\begin{cases} 1 = x^2 + y^2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow 1 = x^2 + 4 \Rightarrow x^2 = -3$$

qui n'a pas de solution et donc les courbes ne se croisent pas.

Une alternative à calculer $\iint_A \text{rot } F(x, y) dx dy = \iint_{A_0} \text{rot } F(x, y) dx dy - \iint_{A_1} \text{rot } F(x, y) dx dy$ est de séparer A en quatre parties y simple ou x simple :



Variante 1 : $A = A_0 \setminus A_1$

On utilise les coordonnées cartésiennes pour A_0 qui est y -simple :

$$A_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-\sqrt{6}, \sqrt{6}], x^2 - 4 \leq y \leq 2\}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \iint_{A_0} \text{rot } F(x, y) dx dy &= \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \int_{x^2-4}^2 -x dy dx = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} -6x + x^3 dx = \left[-3x^2 + \frac{1}{4}x^4 \right]_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \\ &= -18 + 9 + 18 - 9 = 0 \end{aligned}$$

On utilise les coordonnées polaires pour A_1 , $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$. La condition devient $x^2 + y^2 < 1 \Leftrightarrow r < 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \iint_{A_1} \text{rot } F(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \text{rot } F(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} -r^2 \cos \theta d\theta dr = - \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^1 [\sin \theta]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

et finalement

$$\iint_A \text{rot } F(x, y) dx dy = \iint_{A_0} \text{rot } F(x, y) dx dy - \iint_{A_1} \text{rot } F(x, y) dx dy = 0$$

Variante 2 : $A = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$.

On a

$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-\sqrt{6}, -1], x^2 - 4 \leq y \leq 2\}$$

$$\iint_{E_1} \operatorname{rot} F(x, y) dx dy = \int_{-\sqrt{6}}^{-1} \int_{x^2-4}^2 -x dy dx = \int_{-\sqrt{6}}^{-1} -6x + x^3 dx = \left[-3x^2 + \frac{1}{4}x^4\right]_{-\sqrt{6}}^{-1}$$

$$= -3 + \frac{1}{4} + 18 - 9 = 6 + \frac{1}{4}$$

$$E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], \sqrt{1-x^2} \leq y \leq 2\}$$

$$\iint_{E_2} \operatorname{rot} F(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^2 -x dy dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} x - 2x dx = \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - x^2\right]_{-1}^1$$

$$= 0 - 1 + 0 + 1 = 0$$

$$E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], x^2 - 4 \leq y \leq -\sqrt{1-x^2}\}$$

$$\iint_{E_3} \operatorname{rot} F(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{x^2-4}^{-\sqrt{1-x^2}} -x dy dx = \int_{-1}^1$$

$$= 0 - 1 + 0 + 1 = 0$$

$$E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, \sqrt{6}], x^2 - 4 \leq y \leq 2\}$$

$$\iint_{E_4} \operatorname{rot} F(x, y) dx dy = \int_1^{\sqrt{6}} \int_{x^2-4}^2 -x dy dx = \int_1^{\sqrt{6}} -6x + x^3 dx = \left[-3x^2 + \frac{1}{4}x^4\right]_1^{\sqrt{6}}$$

$$= -18 + 9 + 3 - \frac{1}{4} = -6 - \frac{1}{4}$$

$$\iint_A \operatorname{rot} F(x, y) dx dy = \iint_{E_1} \operatorname{rot} F(x, y) dx dy + \iint_{E_2} \operatorname{rot} F(x, y) dx dy$$

$$+ \iint_{E_3} \operatorname{rot} F(x, y) dx dy + \iint_{E_4} \operatorname{rot} F(x, y) dx dy = 0$$

Variante 3 : $A = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4$.

Cette variante est omise.

Exercice 3 (ex 4.3 p. 42, corrigé p. 45).

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ le triangle de sommets $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$. Soit $f(x, y) = y + e^x$. Calculer :

(i) $\int_{\Omega} \Delta f(x, y) dx dy$

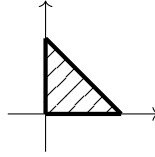
(ii) $\int_{\partial\Omega} \langle \nabla f(x, y), \nu \rangle dl$ où $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ est la normale extérieure unité à $\partial\Omega$.

Solution :

(i) On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} [y + e^x] = e^x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} [e^x] = e^x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} [y + e^x] = 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} [1] = 0 \\ \Delta f(x, y) &= e^x.\end{aligned}$$

Le domaine est soit x simple avec $0 \leq x \leq 1 - y$ pour $y \in [0, 1]$ soit y simple avec $0 \leq y \leq 1 - x$ pour $x \in [0, 1]$.



Variante 1 pour le calcul de $\iint_{\Omega} \Delta f(x, y) dx dy$: x -simple.

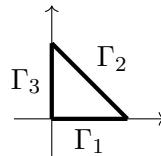
On a

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} \Delta f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_0^{1-y} e^x dx dy = \int_0^1 [e^x]_{x=0}^{x=1-y} dy = \int_0^1 e^{1-y} - 1 dy \\ &= [-e^{1-y} - y]_0^1 = -1 - 1 + e + 0 = e - 2.\end{aligned}$$

Variante 1 pour le calcul de $\iint_{\Omega} \Delta f(x, y) dx dy$: y -simple.

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} \Delta f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_0^{1-x} e^x dy dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx = [e^x]_0^1 - \int_0^1 x e^x dx \\ &\stackrel{\text{IPP}}{=} e - 1 - [x e^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx = e - 1 - e + 0 + e - 1 = e - 2\end{aligned}$$

Le bord de Ω se sépare en 3 parties :



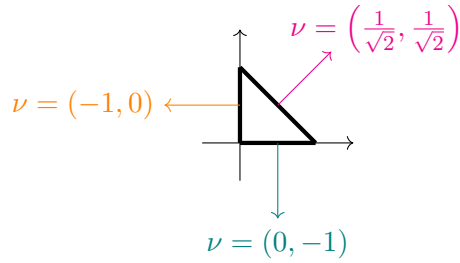
qu'on paramétrise respectivement par :

$$\begin{aligned}\Gamma_1 : \gamma_1 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \gamma_1(t) = (t, 0) \\ \Gamma_2 : \gamma_2 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \gamma_2(t) = (t, 1 - t) \\ \Gamma_3 : \gamma_3 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \gamma_3(t) = (0, t)\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\nabla f(x, y) = (e^x, 1)$$

Variante 1 pour la calcul de $\iint_{\partial\Omega} \langle \nabla f(x, y), \nu \rangle dl$: trouver la normale extérieur en inspectant le dessin.



Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla f(\gamma_1(t)), \nu \rangle &= \langle (e^t, 1), (0, -1) \rangle = -1 \\
 \gamma_1'(t) &= (1, 0) \\
 \|\gamma_1'(t)\| &= 1 \\
 \int_{\Gamma_1} \langle \nabla f(x, y), \nu \rangle dl &= \int_0^1 -1 \cdot 1 dt = -1 \\
 \\
 \langle \nabla f(\gamma_2(t)), \nu \rangle &= \left\langle (e^t, 1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^t + 1) \\
 \gamma_2'(t) &= (1, -1) \\
 \|\gamma_2'(t)\| &= \sqrt{2} \\
 \int_{\Gamma_2} \langle \nabla f(x, y), \nu \rangle dl &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}} (e^t + 1) \sqrt{2} dt = e \\
 \\
 \langle \nabla f(\gamma_3(t)), \nu \rangle &= \langle (1, 1), (-1, 0) \rangle = -1 \\
 \gamma_3'(t) &= (0, 1) \\
 \int_{\Gamma_3} \langle \nabla f(x, y), \nu \rangle dl &= \int_0^1 -1 \cdot 1 = -1
 \end{aligned}$$

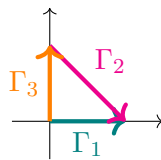
Pour finir,

$$\int_{\partial\Omega} \langle \nabla f(x, y), \nu \rangle dl = \int_{\Gamma_1} \langle \nabla f(x, y), \nu \rangle dl + \int_{\Gamma_2} \langle \nabla f(x, y), \nu \rangle dl + \int_{\Gamma_3} \langle \nabla f(x, y), \nu \rangle dl = e - 2$$

Remarque.

Vu que $\langle \nabla f(x, y), \nu \rangle$ est scalaire, il n'y a pas besoin de se préoccuper de l'orientation du bord.

Variante 2 pour le calcul de $\iint_{\partial\Omega} \langle \nabla f(x, y), \nu \rangle dl$: utiliser la formule pour les intégrales du type $\int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle dl$



On observe que Γ_1 est orienté positivement tandis que Γ_2 et Γ_3 sont orientés négativement.

On a

$$\begin{aligned}\gamma_1'(t) &= (1, 0) \\ \langle \nabla f(\gamma_1(t)), ((\gamma_1')_2(t), -(\gamma_1')_1(t)) \rangle &= \langle (e^t, 1), (0, -1) \rangle = -1 \\ \int_{\Gamma_1} \langle \nabla f, \nu \rangle &= \int_0^1 -1 dt = -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2'(t) &= (1, -1) \\ \langle \nabla f(\gamma_2(t)), ((\gamma_2')_2(t), -(\gamma_2')_1(t)) \rangle &= \langle (e^t, 1), (-1, -1) \rangle = -e^t - 1 \\ \int_{\Gamma_2} \langle \nabla f, \nu \rangle &= \int_0^1 -e^t - 1 dt = -e\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_3'(t) &= (0, 1) \\ \langle \nabla f(\gamma_3(t)), ((\gamma_3')_2(t), -(\gamma_3')_1(t)) \rangle &= \langle (1, 1), (1, 0) \rangle = 1 \\ \int_{\Gamma_3} \langle \nabla f, \nu \rangle &= \int_0^1 1 dt = 1\end{aligned}$$

Pour finir, en prenant en compte l'orientation de nos courbes :

$$\int_{\partial\Omega} \langle \nabla f(x, y), \nu \rangle dl = \int_{\Gamma_1} \langle \nabla f(x, y), \nu \rangle dl - \int_{\Gamma_2} \langle \nabla f(x, y), \nu \rangle dl - \int_{\Gamma_3} \langle \nabla f(x, y), \nu \rangle dl = e - 2$$

Exercice 4 (ex 4.9i p. 43, corrigé p. 51).

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine régulier dont le bord $\partial\Omega$ est orienté positivement. Soient les champs vectoriels F , G_1 et G_2 définis par

$$F(x, y) = (-y, x), \quad G_1(x, y) = (0, x) \quad \text{et} \quad G_2(x, y) = (-y, 0).$$

Montrer que :

- (i) $\text{Aire}(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} F \cdot dl$
- (ii) $\text{Aire}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} G_1 \cdot dl$
- (iii) $\text{Aire}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} G_2 \cdot dl$

Solution :

(i) Par le théorème de Green, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} F \cdot dl &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{rot } F(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} [x] - \frac{\partial}{\partial y} [-y] dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} 2 dx dy \\ &= \int_{\Omega} 1 dx dy = \text{Aire}(\Omega).\end{aligned}$$

(ii) Par le théorème de Green, on a

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} G_1 \cdot dl &= \int_{\Omega} \operatorname{rot} G_1(x, y) dx dy \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} [x] - \frac{\partial}{\partial y} [0] dx dy \\ &= \int_{\Omega} 1 dx dy = \operatorname{Aire}(\Omega).\end{aligned}$$

(iii) Par le théorème de Green, on a

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} G_2 \cdot dl &= \int_{\Omega} \operatorname{rot} G_2(x, y) dx dy \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} [0] - \frac{\partial}{\partial y} [-y] dx dy \\ &= \int_{\Omega} 1 dx dy = \operatorname{Aire}(\Omega).\end{aligned}$$