

**Exercice 1** (ex 3.1, p. 27, corrigé p. 30).

Parmi les champs vectoriels  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ci-dessous, lesquels dérivent d'un potentiel? Si il dérivent d'un potentiel, donner un potentiel, sinon, trouver un chemin fermé  $\Gamma$  tel que  $\int_{\Gamma} F \cdot dl \neq 0$ .

(i)  $F(x, y) = (y, xy - x)$

(ii)  $F(x, y) = (3x^2y + 2x, x^3)$

(iii)  $F(x, y) = (3x^2y, x^2)$ .

**Solution :**

**Remarque.**

Vu que le domaine de tous nos champs vectoriels est  $\mathbb{R}^2$  qui est simplement connexe, ces champs dérivent d'un potentiel si et seulement si  $\text{rot } F = 0$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Exceptionnellement, dans le cas où  $F$  ne dérive pas d'un potentiel, on demande un chemin fermé tel que  $\int_{\Gamma} F \cdot dl \neq 0$ . Généralement, choisir une courbe fermée au hasard fait l'affaire (si  $\text{rot } F \neq 0$ , il y a très peu de courbes fermées pour lesquelles  $\int_{\Gamma} F \cdot dl = 0$ .) On verra plus tard (avec le théorème de Green) que si on choisit une courbe qui est le bord d'une région  $\Omega$  telle que  $\text{rot } F > 0$  sur  $\Omega$  (ou  $\text{rot } F < 0$  sur  $\Omega$ ) on aura

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dl = \int_{\Omega} \text{rot } F dx dy > 0 \neq 0 \quad (\text{ou } < 0 \neq 0)$$

(i) On a

$$\text{rot } F(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} [xy - y] - \frac{\partial}{\partial y} [y] = x - 1 - 1 = x - 2 \neq 0$$

donc  $F$  ne dérive pas d'un potentiel.

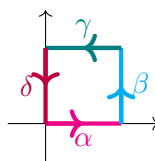
Choisissons  $\Gamma$  au hasard, par exemple  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  qu'on paramétrise avec  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ . On a alors

$$F(\gamma(t)) = (\sin t, \cos t \sin t - \cos t)$$

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} \langle (\sin t, \cos t \sin t - \cos t), (-\sin t, \cos t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} -\sin^2 t - \cos t \sin^2 t - \cos^2 t dt \\ &= -\int_0^{2\pi} 1 + \sin^2 t \cos t dt = \left[ t + \frac{1}{3} \sin^3 t \right]_0^{2\pi} = -2\pi \end{aligned}$$

Alternativement, on peut choisir le bord du carré  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Le fait que notre courbe passe sur les axes nous donne le fait que  $x = 0$  ou  $y = 0$  souvent ce qui facilite le calcul. De plus, paramétrer des segments de droite nous donne des expressions polynomiale ce qu'on pourra toujours intégrer (vu que l'expression de  $F$  est également polynomiale.)



On paramétrise ces courbes en utilisant la paramétrisation standard pour un segment de  $a = (a_1, a_2)$  à  $b = (b_1, b_2)$  :  $t \mapsto tb + (1-t)a = a + t(b-a)$ , pour  $t \in [0, 1]$ .

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= t(1, 0) + (1-t)(0, 0) = (t, 0) \\ F(\alpha(t)) &= (0, t \cdot 0 - t) = (0, -t) \\ \alpha'(t) &= (1, 0)\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \langle F(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt = \int_0^1 \langle (0, -t), (1, 0) \rangle dt = \int_0^1 0 dt = 0$$

$$\begin{aligned}\beta(t) &= t(1, 1) + (1-t)(1, 0) = (1, t) \\ F(\beta(t)) &= (t, t-1) \\ \beta'(t) &= (0, 1)\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \langle F(\beta(t)), \beta'(t) \rangle dt = \int_0^1 \langle (t, t-1), (0, 1) \rangle dt = \int_0^1 t-1 dt = \left[ \frac{1}{2}t^2 - t \right]_0^1 = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= t(0, 1) + (1-t)(1, 1) = (1-t, 1) \\ F(\gamma(t)) &= (1, (1-t) - (1-t)) = (1, 0) \\ \gamma'(t) &= (-1, 0)\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_0^1 \langle (1, 0), (-1, 0) \rangle dt = \int_0^1 -1 dt = -1$$

$$\begin{aligned}\delta(t) &= t(0, 0) + (1-t)(0, 1) = (0, 1-t) \\ F(\delta(t)) &= (1-t, (1-t) \cdot 0 - 0) = (1-t, 0) \\ \delta'(t) &= (0, -1)\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \langle F(\delta(t)), \delta'(t) \rangle dt = \int_0^1 \langle (1-t, 0), (0, -1) \rangle dt = \int_0^1 0 dt = 0$$

Pour finir,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} F \cdot dl &= \int_0^1 \langle F(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt + \int_0^1 \langle F(\beta(t)), \beta'(t) \rangle dt \\ &\quad + \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt + \int_0^1 \langle F(\delta(t)), \delta'(t) \rangle dt = -\frac{3}{2} \neq 0\end{aligned}$$

(ii) On a

$$\operatorname{rot} F(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} [x^3] - \frac{\partial}{\partial y} [3x^2y + 2x] = 3x^2 - 3x^2 = 0$$

et donc  $F$  dérive d'un potentiel. On doit donc trouver  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= F_1(x, y) = 3x^2y + 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= F_2(x, y) = x^3\end{aligned}$$

On a le choix entre commencer par intégrer la première équation par rapport à  $x$  ou commencer par intégrer la deuxième équation par rapport à  $y$ .

Variante 1 : Commencer par intégrer la première équation par rapport à  $x$ .

On a

$$f(x, y) = \int \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx = \int 3x^2y + 2x dx = x^3y + x^2 + C(y),$$

où, vu qu'on a intégré par rapport à  $x$ , notre constante peut dépendre de  $y$ . On injecte ceci dans notre deuxième équation :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [x^3 y + x^2 + C(y)] = x^3 + C'(y) := x^3.$$

Ainsi, il faut que  $C'(y) = 0$ , soit que  $C$  est une constante. Pour finir les potentiels de  $F$  sont

$$f(x, y) = x^3 y + x^2 + C,$$

avec  $C \in \mathbb{R}$ . (Pas besoin de garder la constante, en réalité; pas besoin de donner tous les potentiels, un suffit.)

Variante 2 : Commencer par intégrer la deuxième équation par rapport à  $y$ .

On a

$$f(x, y) = \int \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy = \int x^3 dy = x^3 y + C(x),$$

où, vu qu'on a intégré par rapport à  $y$ , notre constante peut dépendre de  $x$ . On injecte ceci dans notre première équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [x^3 y + C(x)] = 3x^2 y + C'(x) := 3x^2 y + 2x.$$

Ainsi, il faut que  $C'(x) = 2x$ , soit que  $C(x) = x^2 + K$  où  $K$  est une constante. Pour finir, les potentiels de  $F$  sont

$$f(x, y) = x^3 y + x^2 + K,$$

avec  $K \in \mathbb{R}$ . (Pas besoin de garder la constante en réalité; pas besoin de donner tous les potentiels, un suffit.)

(iii) On a

$$\text{rot } F(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} [x^2] - \frac{\partial}{\partial y} [3x^2 y] = 2x - 3x^2 \neq 0.$$

donc  $F$  ne dérive pas d'un potentiel.

Choisissons  $\Gamma$  au hasard, par exemple  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  qu'on paramétrise avec  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ . On a alors

$$\begin{aligned} F(\gamma(t)) &= (3 \cos^2 t \sin t, \cos^2 t) \\ \gamma'(t) &= (-\sin t, \cos t) \\ \int_{\Gamma} F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} \langle (3 \cos^2 t \sin t, \cos^2 t), (-\sin t, \cos t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} -3 \cos^2 t \sin^2 t + \cos^3 t dt. \end{aligned}$$

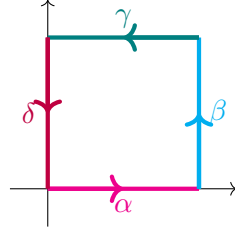
On calcule les primitives en utilisant la technique développée dans la série 1 avec les formules d'Euler :

$$\begin{aligned} \cos^2 t \sin^2 t &= \left( \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^2 \left( \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^2 = \frac{-1}{16} (e^{2it} + 2 + e^{-2it}) (e^{2it} - 2 + e^{-2it}) \\ &= \frac{-1}{16} (e^{4it} - 2e^{2it} + 1 + 2e^{2it} - 4 + 2e^{-2it} + 1 - e^{-2it} + e^{-4it}) \\ &= \frac{-1}{16} (e^{4it} + e^{-4it} - 2) = -\frac{1}{8} (\cos 4t - 1) \\ \cos^3 t &= \left( \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (e^{3it} + e^{-3it} + 3e^{it} + 3e^{-it}) \\ &= \frac{1}{4} \cos(3t) + \frac{3}{4} \cos(t), \end{aligned}$$

ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} \frac{3}{8} \cos 4t + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos(3t) + \frac{3}{4} \cos(t) dt \\ &= \left[ \frac{3}{32} \sin(4t) + \frac{3}{8} t + \frac{1}{12} \sin(3t) + \frac{3}{4} \sin(t) \right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{4} \neq 0.\end{aligned}$$

Alternativement, comme au point 1, on pourrait prendre le bord du carré  $[0, 2] \times [0, 2]$  (si on prend le bord du carré  $[0, 1] \times [0, 1]$ , on trouve malheureusement 0. Pas de bol...)



On a alors,

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= (2t, 0) \\ F(\alpha(t)) &= (3(2t)^2 \cdot 0, (2t)^2) = (0, 4t^2) \\ \alpha'(t) &= (2, 0) \\ \int_0^1 \langle F(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt &= \int_0^1 \langle (0, 4t^2), (2, 0) \rangle dt = \int_0^1 0 dt = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta(t) &= (2, 2t) \\ F(\beta(t)) &= (24t, 4) \\ \beta'(t) &= (0, 2) \\ \int_0^1 \langle F(\beta(t)), \beta'(t) \rangle dt &= \int_0^1 \langle (24t, 4), (0, 2) \rangle dt = \int_0^1 8 dt = 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (2 - 2t, 2) \\ F(\gamma(t)) &= (24(1 - t)^2, 4(1 - t)^2) \\ \gamma'(t) &= (-2, 0) \\ \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt &= \int_0^1 \langle (24(1 - t)^2, 4(1 - t)^2), (-2, 0) \rangle dt \\ &= \int_0^1 -48(1 - t)^2 dt = [16(1 - t)^3]_0^1 = -16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta(t) &= (0, 2 - 2t) \\ F(\delta(t)) &= (3 \cdot 0 \cdot (2 - 2t), 0) = (0, 0) \\ \delta'(t) &= (0, -2) \\ \int_0^1 \langle F(\delta(t)), \delta'(t) \rangle dt &= \int_0^1 \langle (0, 0), (0, -2) \rangle dt = \int_0^1 0 dt = 0.\end{aligned}$$

Pour finir,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} F \cdot dl &= \int_0^1 \langle F(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt + \int_0^1 \langle F(\beta(t)), \beta'(t) \rangle dt \\ &\quad + \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt + \int_0^1 \langle F(\delta(t)), \delta'(t) \rangle dt = -8 \neq 0\end{aligned}$$

**Exercice 2** (ex 3.3, p. 28, corrigé p. 32).

Soit  $F(x, y, z) = \left( 2xy + \frac{z}{1+x^2}, x^2 + 2yz, y^2 + \arctan x \right)$ .

Le champ  $F$  dérive-t-il d'un potentiel sur  $\mathbb{R}^3$ ? Si oui, trouver ce potentiel.

**Solution :**

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2xy + \frac{z}{1+x^2} \right] = 2x \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ 2xy + \frac{z}{1+x^2} \right] = \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} [x^2 + 2yz] = 2x \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} [x^2 + 2yz] = 2y \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} [y^2 + \arctan x] = \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{\partial F_3}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} [y^2 + \arctan x] = 2y\end{aligned}$$

$$\operatorname{rot} F = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = (0, 0, 0)$$

De plus, vu que le domaine de définition de  $F$  est  $\mathbb{R}^3$  qui est simplement connexe,  $F$  dérive d'un potentiel. On cherche donc  $f$  tel que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = F_1 = 2xy + \frac{z}{1+x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = F_2 = x^2 + 2yz \\ \frac{\partial f}{\partial z} = F_3 = y^2 + \arctan x \end{cases}$$

Variante 1 : Intégrer la première équation par rapport à  $x$ .

On a

$$f(x, y, z) = \int \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) dx = \int 2xy + \frac{z}{1+x^2} dx = x^2y + z \arctan x + C(y, z),$$

où, vu qu'on a intégré par rapport à  $x$ , la constante peut dépendre de  $y$  et  $z$ .

Variante 1.1 : Injecter dans la deuxième équation et intégrer par rapport à  $y$ .

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y} [x^2y + z \arctan x + C(y, z)] = x^2 + \frac{\partial C}{\partial y}(y, z) := x^2 + 2yz \\ \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial y}(y, z) &= 2yz \\ C(y, z) &= \int \frac{\partial C}{\partial y}(y, z) dy = \int 2yz dy = y^2z + K(z), \\ \Rightarrow f(x, y, z) &= x^2y + y^2z + z \arctan x + K(z)\end{aligned}$$

où, vu qu'on a intégré par rapport à  $y$ , la constante  $K$  peut dépendre de  $z$  (mais pas de  $x$  car  $C$  ne dépend pas de  $x$ .)

Pour finir, en injectant ceci dans la troisième équation et en intégrant par rapport à  $z$ , on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial z} [x^2y + y^2z + z \arctan x + K(z)] = y^2 + \arctan x + K'(z) := y^2 + \arctan x \\ \Rightarrow K'(z) &= 0 \\ K(z) &= \text{const}\end{aligned}$$

et enfin,

$$f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z \arctan x + K,$$

avec  $K \in \mathbb{R}$ . (Pas besoin de garder la constante en réalité ; pas besoin de donner tous les potentiels, un suffit.)

*Variante 1.2* : Injecter dans la troisième équation et intégrer par rapport à  $z$ .

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial z} [x^2y + z \arctan x + C(y, z)] = \arctan x + \frac{\partial C}{\partial z}(y, z) := y^2 + \arctan x \\ \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial z}(y, z) &= y^2 \\ C(y, z) &= \int \frac{\partial C}{\partial z}(y, z) = y^2z + K(y) \\ \Rightarrow f(x, y, z) &= x^2y + y^2z + z \arctan x + K(y)\end{aligned}$$

où, vu qu'on a intégré par rapport à  $z$ , la constante  $K$  peut dépendre de  $y$  (mais pas de  $x$  car  $C$  ne dépend pas de  $x$ .)

Pour finir, en injectant ceci dans la deuxième équation et en intégrant par rapport à  $y$ , on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y} [x^2y + y^2z + z \arctan x + K(y)] = x^2 + 2yz + K'(y) := x^2 + 2yz \\ \Rightarrow K'(y) &= 0 \\ K(y) &= \text{const}\end{aligned}$$

et enfin

$$f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z \arctan x + K,$$

avec  $K \in \mathbb{R}$ . (Pas besoin de garder la constante en réalité ; pas besoin de donner tous les potentiels, un suffit.)

*Variante 2* : Intégrer la deuxième équation par rapport à  $y$ .

On a

$$f(x, y, z) = \int \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) dy = \int x^2 + 2yz dy = x^2y + y^2z + C(x, z)$$

où, vu qu'on a intégré par rapport à  $y$ , la constante peut dépendre de  $x$  et  $z$ .

*Variante 2.1* : Injecter dans la première équation et intégrer par rapport à  $x$ .

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} [x^2y + y^2z + C(x, z)] = 2xy + \frac{\partial C}{\partial x}(x, z) := 2xy + \frac{z}{1+x^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial x}(x, z) &= \frac{z}{1+x^2} \\ C(x, z) &= \int \frac{\partial C}{\partial x}(x, z) dx = \int \frac{z}{1+x^2} dx = z \arctan x + K(z) \\ \Rightarrow f(x, y, z) &= x^2y + y^2z + \frac{z}{1+x^2} + K(z)\end{aligned}$$

où, vu qu'on a intégré par rapport à  $x$ , la constante  $K$  a le droit de dépendre de  $z$  (mais pas de  $y$  car  $C$  ne dépend pas de  $y$ .)

Pour finir, en injectant ceci dans la troisième équation et en intégrant par rapport à  $z$ , on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ x^2 y + y^2 z + z \arctan x + K(z) \right] = y^2 + \arctan x + K'(z) := y^2 + \arctan x \\ \Rightarrow K'(z) &= 0 \\ K(z) &= \text{const}\end{aligned}$$

et enfin,

$$f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z + z \arctan x + K,$$

avec  $K \in \mathbb{R}$ . (Pas besoin de garder la constante en réalité; pas besoin de donner tous les potentiels, un suffit.)

*Variante 2.2* : Injecter dans la troisième équation et intégrer par rapport à  $z$ .

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ x^2 y + y^2 z + C(x, z) \right] = y^2 + \frac{\partial C}{\partial z}(x, z) := y^2 + \arctan x \\ \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial z}(x, z) &= \arctan x \\ C(x, z) &= \int \frac{\partial C}{\partial z}(x, z) dz = \int \arctan x dz = z \arctan x + K(x) \\ \Rightarrow f(x, y, z) &= x^2 y + y^2 z + z \arctan x + K(x)\end{aligned}$$

où, vu qu'on a intégré par rapport à  $z$ , la constante  $K$  a le droit de dépendre de  $x$  (mais pas de  $y$  car  $C$  ne dépend pas de  $y$ .)

Pour finir, en injectant ceci dans la première équation et en intégrant par rapport à  $x$ , on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^2 y + y^2 z + \frac{z}{1+x^2} + K(x) \right] = 2xy + \frac{z}{1+x^2} := 2xy + \frac{z}{1+x^2} \\ \Rightarrow K'(x) &= 0 \\ K(x) &= \text{const}\end{aligned}$$

et enfin,

$$f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z + z \arctan x + K,$$

avec  $K \in \mathbb{R}$ . (Pas besoin de garder la constante en réalité; pas besoin de donner tous les potentiels, un suffit.)

*Variante 3* : Intégrer la troisième équation par rapport à  $z$ .

On a

$$f(x, y, z) = \int \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) dz = \int y^2 + \arctan x dz = y^2 z + z \arctan x + C(x, y),$$

où, vu qu'on a intégré par rapport à  $z$ , la constante  $C$  a le droit de dépendre de  $x$  et  $y$ .

*Variante 3.1* : Injecter dans la première équation et intégrer par rapport à  $x$ .

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ y^2 z + z \arctan x + C(x, y) \right] = \frac{z}{1+x^2} + \frac{\partial C}{\partial x}(x, y) := 2xy + \frac{z}{1+x^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial x}(x, y) &= 2xy \\ C(x, y) &= \int \frac{\partial C}{\partial x}(x, y) dx = \int 2xy dx = x^2 y + K(y) \\ \Rightarrow f(x, y, z) &= x^2 y + y^2 z + z \arctan x + K(y)\end{aligned}$$

où, vu qu'on a intégré par rapport à  $x$ , la constante  $K$  a le droit de dépendre de  $y$  (mais pas de  $z$  car  $C$  ne dépend pas de  $z$ .)

Pour finir, en injectant ceci dans la deuxième équation et en intégrant par rapport à  $y$ , on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ x^2 y + y^2 z + z \arctan x + K(y) \right] = x^2 + 2yz + K'(y) := x^2 + 2yz \\ \Rightarrow K'(y) &= 0 \\ K(y) &= \text{const}\end{aligned}$$

et enfin

$$f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z + z \arctan x + K,$$

avec  $K \in \mathbb{R}$ . (Pas besoin de garder la constante en réalité; pas besoin de donner tous les potentiels, un suffit.)

*Variante 3.2* : Injecter dans la deuxième équation et intégrer par rapport à  $y$ .

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ y^2 z + z \arctan x + C(x, y) \right] = 2yz + \frac{\partial C}{\partial y}(x, y) := x^2 + 2yz \\ \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial y}(x, y) &= x^2 \\ C(x, y) &= \int \frac{\partial C}{\partial y}(x, y) dy = \int x^2 dy = x^2 y + K(x) \\ \Rightarrow f(x, y, z) &= x^2 y + y^2 z + z \arctan x + K(x)\end{aligned}$$

où, vu qu'on a intégré par rapport à  $y$ , la constante  $K$  a le droit de dépendre de  $x$  (mais pas de  $z$  car  $C$  ne dépend pas de  $z$ .)

Pour finir, en injectant ceci dans la première équation et en intégrant par rapport à  $x$ , on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^2 y + y^2 z + \frac{z}{1+x^2} + K(x) \right] = 2xy + \frac{z}{1+x^2} := 2xy + \frac{z}{1+x^2} \\ \Rightarrow K'(x) &= 0 \\ K(x) &= \text{const}\end{aligned}$$

et enfin,

$$f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z + z \arctan x + K,$$

avec  $K \in \mathbb{R}$ . (Pas besoin de garder la constante en réalité; pas besoin de donner tous les potentiels, un suffit.)

**Exercice 3** (ex 3.8, p. 29, corrigé p. 36).

Pour les champs vectoriels  $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  ci-dessous, dérivent-ils d'un potentiel? Si oui, donner un potentiel, si non, justifier votre réponse

$$(i) F(x, y) = \left( \frac{-x}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-y}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

$$(ii) F(x, y) = \left( \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

**Solution** :

On utilise la méthode du cours. **Dans ce corrigé, lorsqu'il faudra choisir entre chercher un potentiel et chercher un chemin fermé, on va systématiquement prendre la mauvaise décision pour voir comment repérer qu'on est parti dans la mauvaise direction.**

(i) Étape 1 : Calcul  $\text{rot } F$ .

On a

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F(x, y) &= \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{-y}{(x^2 + y^2)^2} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{-x}{(x^2 + y^2)^2} \right] \\ &= \left( -y(-2) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^3} \right] \right) - \left( -x(-2) \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^3} \right] \right) \\ &= 4y \frac{x}{(x^2 + y^2)^3} - \left( 4x \frac{y}{(x^2 + y^2)^3} \right) = 0 \end{aligned}$$

Le rotationnel de  $F$  est nul, on passe à

Étape 2 : Domaine de  $F$ .

Le domaine de  $F$  est  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  qui n'est pas simplement connexe ; il a un trou à l'origine. On passe donc à l'étape 3 pour laquelle on a un choix : essayer de trouver un potentiel, ou essayer de calculer l'intégrale sur un chemin fermé qui entoure le trou du domaine. Ici, le champ va dériver d'un potentiel (pas vraiment de moyen de la savoir à ce stade) on teste (pour des raisons pédagogiques) d'abord de chercher une courbe qui entoure un trou du domaine.

Étape 3 : Pour chaque trou du domaine, on intègre  $F$  sur un chemin fermé qui entoure ce trou.

Ici, le seul trou dans le domaine est l'origine, on n'a donc qu'un seul chemin à trouver et on choisit  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  qu'on paramétrise avec  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ .

On a alors,

$$\begin{aligned} F(\gamma(t)) &= (-\cos t, -\sin t) \\ \gamma'(t) &= (-\sin t, \cos t) \end{aligned}$$

$$\int_{\gamma} F \cdot dl = \int_0^{2\pi} \langle (-\cos t, -\sin t), (-\sin t, \cos t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} \cos t \sin t - \cos t \sin t dt = \int_0^{2\pi} 0 dt = 0$$

Vu qu'il n'y a qu'un seul trou dans le domaine et qu'une intégrale sur un contour fermé autour de ce trou donne 0, on soupçonne que l'intégrale sur tous les chemins fermés est nulle, soit que  $F$  dérive d'un potentiel et on change d'idée : on va chercher un potentiel pour  $F$ .

Étape 4 : On cherche un potentiel.

On cherche  $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$  tel que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-x}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-y}{(x^2 + y^2)^2} \end{cases}$$

Vu que nos expressions sont symétriques en  $x$  et  $y$ , on choisit de commencer à intégrer la première équation par rapport à  $x$ . Les calculs dans le cas où on choisit de commencer à intégrer la deuxième équation par rapport à  $y$  sont les mêmes, il suffit d'invertir les rôles de  $x$  et  $y$ .

On a

$$f(x, y) = \int \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx = \int \frac{-x}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{1}{2(x^2 + y^2)} + C(y),$$

où, vu qu'on a intégré par rapport à  $x$ , la constante a le droit de dépendre de  $y$ .

En injectant dans la deuxième équation on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2(x^2 + y^2)} + C(y) \right] = \frac{-y}{(x^2 + y^2)^2} + C'(y) := \frac{-y}{(x^2 + y^2)^2} \\ &\Rightarrow C'(y) = 0 \\ &C(y) = \text{const.} \end{aligned}$$

Pour finir, les potentiels de  $F$  sont

$$f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)} + C,$$

avec  $C \in \mathbb{R}$ .

(ii) Étape 1 : Calcul  $\text{rot } F$ .

On a

$$\begin{aligned} \text{rot } F(x, y) &= \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{-xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2} \right] \\ &= \frac{-y^2(x^2 + y^2)^2 + xy^2 \frac{\partial}{\partial x} [(x^2 + y^2)^2]}{(x^2 + y^2)^4} - \frac{3y^2(x^2 + y^2)^2 - y^3 \frac{\partial}{\partial y} [(x^2 + y^2)^2]}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{-y^2(x^2 + y^2)^2 + xy^2 \cdot 4x(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^4} - \frac{3y^2(x^2 + y^2)^2 - y^3 \cdot 4y(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{-y^2(x^2 + y^2) + 4x^2y^2 - 3y^2(x^2 + y^2) + 4y^4}{(x^2 + y^2)^3} \\ &= \frac{-y^2x^2 - y^4 + 4x^2y^2 - 3y^2x^2 - 3y^4 + 4y^4}{(x^2 + y^2)^3} = 0 \end{aligned}$$

Le rotationnel de  $F$  est nul, on passe à

Étape 2 : Domaine de  $F$ .

Le domaine de  $F$  est  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  qui n'est pas simplement connexe ; il a un trou à l'origine. On passe donc à l'étape 3 pour laquelle on a un choix : essayer de trouver un potentiel, ou essayer de calculer l'intégrale sur un chemin fermé qui entoure le trou du domaine. Ici, le champ ne va pas dériver d'un potentiel (pas vraiment de moyen de la savoir à ce stade) on teste (pour des raisons pédagogiques) d'abord de chercher un potentiel.

Étape 3 : On cherche un potentiel pour  $F$ .

On cherche  $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$  tel que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{cases}$$

On intègre la première équation par rapport à  $x$ . (On pourrait intégrer la deuxième équation par rapport à  $y$ , les calculs ne sont sensiblement moins difficiles, mais pas pour autant faciles.)

On a

$$f(x, y) = \int \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx = \int \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2} dx = \int \frac{y^{-4}}{y^{-4}} \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2} dx = \int \frac{1}{y} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)^2} dx.$$

à ce stade, il n'est pas déraisonnable que la tronche de notre intégrale nous fasse changer d'avis et qu'on cherche soit à plutôt intégrer la deuxième équation soit à trouver un chemin fermé sur lequel l'intégrale de  $F$  ne s'annule pas.

En effet, la primitive de  $\frac{1}{(1+t^2)^2}$  n'est pas au programme d'analyse I. Cette primitive est néanmoins utile pour la généralisation de la méthode de la décomposition en éléments simples lorsque dans la factorisation de notre dénominateur, on a des termes de la forme  $(x^2 + bx + c)^2$  où le polynôme  $x^2 + bx + c$  est irréductible, c'est-à-dire, il n'a pas de racine réelle.

On propose ici une méthode pour la calculer (ce n'est **pas** le genre de chose qu'il faudra savoir faire à l'examen.)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx &= \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx + \int \frac{x}{2(1+x^2)^2} dx \\
&\stackrel{\text{IPP}}{=} \arctan(x) + \frac{x}{2} \frac{1}{1+x^2} - \int \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + \arctan(x) - \frac{1}{2} \arctan(x) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{x}{1+x^2} + \arctan(x) \right).
\end{aligned}$$

On reprend notre calcul,

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \int \frac{1}{y} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2\right)^2} dx = \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{x}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} + \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \right) + C(y) \\
&= \frac{1}{2} \frac{xy}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + C(y).
\end{aligned}$$

À ce stade, remarquons que la partie  $\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$  n'a pas le même domaine de définition que  $F$ . Même si on n'a pas encore trouvé  $C(y)$ , le fait que  $C(y)$  n'a pas le droit de dépendre de  $x$  alors que  $\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$  dépend de  $x$  indique qu'il y a très peu de chances pour que l'expression exacte de  $C(y)$  "corrige" le problème qu'on a avec  $\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ . Plus précisément, ce qu'on veut dire par là c'est que si par exemple  $C(y) = -\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$  était quelque chose d'admissible, alors  $f$  n'aurait pas de problème avec son domaine de définition. Mais ce genre de fonction  $C(y)$  n'est pas admissible car l'expression  $\arctan(x/y)$  dépend de  $x$ , ce qui n'est pas permis pour  $C(y)$ . Ceci est un indice qu'on est probablement parti dans la mauvaise direction. Mais persévérons, juste par curiosité morbide.

On injecte ceci dans notre deuxième équation,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2} \frac{xy}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + C(y) \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{x(x^2 + y^2) - 2y \cdot xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \frac{-x}{y^2} + C'(y) \\
&= \frac{1}{2} \frac{x^3 + xy^2 - 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{1}{2} \frac{x^3 + xy^2}{(x^2 + y^2)^2} + C'(y) \\
&= \frac{-xy^2}{(x^2 + y^2)^2} + C'(y) \\
\Rightarrow C'(y) &= 0 \\
C(y) &= \text{const.}
\end{aligned}$$

et pour finir,

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \frac{xy}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + C,$$

avec  $C \in \mathbb{R}$ .

Comme déjà mentionné, on ne peut pas choisir de constante telle que  $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$  et donc on change d'idée et on cherche une courbe fermée sur la quelle l'intégrale ne s'annule pas.

Étape 4 : Pour chaque trou du domaine, on cherche une courbe fermée entourant ce trou telle que l'intégrale de  $F$  sur cette courbe ne s'annule pas.

Vu que  $(0, 0)$  est le seul trou du domaine, on choisit  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  qu'on paramétrise avec  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ .

On a alors,

$$\begin{aligned} F(\gamma(t)) &= (\sin^3 t, -\cos t \sin^2 t) \\ \gamma'(t) &= (-\sin t, \cos t) \\ \int_{\Gamma} F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} -\sin^4 t - \cos^2 t \sin^2 t dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = -\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt. \end{aligned}$$

On trouve une primitive de  $\sin^2 t$  à l'aide des formules d'Euler :

$$\sin^2 t = \left( \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^2 = -\frac{1}{4} (e^{2it} - 2 + e^{-2it}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t)$$

et donc,

$$\int_{\Gamma} F \cdot dl = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos(2t) - \frac{1}{2} dt = \left[ \frac{1}{4} \sin(2t) - \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi \neq 0$$

et donc  $F$  ne dérive pas d'un potentiel.

**Exercice 4** (ex 3.6, p. 28, corrigé p. 34).

Soit l'équation différentielle

$$F_2(t, u(t)) u'(t) + F_1(t, u(t)) = 0 \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}.$$

Soit  $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$  un champ vectoriel qui dérive d'un potentiel  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

(i) Montrer qu'une solution  $u(t)$  de l'équation différentielle est donnée, sous forme implicite, par

$$f(t, u(t)) = \text{constante} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

*Indication* : Calculer  $\frac{d}{dt} f(t, u(t))$ .

(ii) En déduire une solution de

$$u^2(t)u'(t) + \sin t = 0 \quad \text{pour } t \in \mathbb{R} \text{ avec la condition initiale } u(0) = 3.$$

**Solution** :

(i) Par la formule de dérivation d'un produit de composition, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} [\text{constante}] = \frac{d}{dt} [f(t, u(t))] = \frac{\partial f}{\partial x}(t, u(t)) \frac{d}{dt} [t] + \frac{\partial f}{\partial y}(t, u(t)) \frac{d}{dt} [u(t)] \\ &= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{=F_1}(t, u(t)) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{=F_2}(t, u(t)) u'(t) = F_1(t, u(t)) + F_2(t, u(t)) u'(t), \end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.

(ii) On cherche  $F = (F_1, F_2)$  tel que

$$u^2(t)u'(t) + \sin(t) = F_2(t, u(t))u'(t) + F_1(t, u(t)),$$

c'est-à-dire,

$$\begin{cases} F_1(t, u(t)) = \sin(t) \\ F_2(t, u(t)) = u^2(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1(x, y) = \sin(x) \\ F_2(x, y) = y^2 \end{cases}$$

Un potentiel de  $F = (F_1, F_2)$  est donnée par  $f(x, y) = -\cos(x) + \frac{1}{3}y^3$ .

Pour finir, on cherche  $u(t)$  tel que

$$C = f(t, u(t)) = -\cos(t) + \frac{1}{3}u(t)^3 \quad \Rightarrow \quad u(t) = (3C + 3\cos(t))^{\frac{1}{3}}$$

Pour finir, pour que  $u(0) = 3$ , on doit avoir

$$3 = u(0) = (3C + 3)^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad 3C = 24,$$

et

$$u(t) = (24 + 3\cos(t))^{\frac{1}{3}}$$

**Exercice 5** (ex 3.2, p. 27, corrigé p. 31).

Soit  $F = (F_1, F_2): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un champ tel que  $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  et  $\text{rot } F = 0$ .

Soit  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\varphi(x, y) = \int_0^1 xF_1(tx, ty) + yF_2(tx, ty)dt.$$

(i) Montrer que  $\nabla\varphi(x, y) = F(x, y)$ , i.e.  $\varphi$  est un potentiel de  $F$ .

*Indication* : Calculer  $\frac{d}{dt}[tF_1(tx, ty)]$  et  $\frac{d}{dt}[tF_2(tx, ty)]$

(ii) En déduire un potentiel pour  $F(x, y) = (2xy, x^2 + y)$ .

(iii) Comparer l'expression pour  $\varphi$  du premier point avec la formule donnée dans l'esquisse de la démonstration du Théorème 2.10 du cours.

**Solution** :

(i) On a , pour  $i = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [tF_i(tx, ty)] &= F_i(tx, ty) + t \left( \frac{\partial F_i}{\partial x}(tx, ty) \frac{d}{dt} [tx] + \frac{\partial F_i}{\partial y}(tx, ty) \frac{d}{dt} [ty] \right) \\ &= F_i(tx, ty) + tx \frac{\partial F_i}{\partial x}(tx, ty) + ty \frac{\partial F_i}{\partial y}(tx, ty). \end{aligned}$$

D'un autre côté, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^1 xF_1(tx, ty) + yF_2(tx, ty)dt \right] \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} [xF_1(tx, ty) + yF_2(tx, ty)] dt \\ &= \int_0^1 F_1(tx, ty) + x \left( \frac{\partial F_1}{\partial x}(tx, ty) \frac{\partial}{\partial x} [tx] + \frac{\partial F_1}{\partial y}(tx, ty) \frac{\partial}{\partial x} [ty] \right) \\ &\quad + y \left( \frac{\partial F_2}{\partial x}(tx, ty) \frac{\partial}{\partial x} [tx] + \frac{\partial F_2}{\partial y}(tx, ty) \frac{\partial}{\partial x} [ty] \right) dt \\ &= \int_0^1 F_1(tx, ty) + x \frac{\partial F_1}{\partial x}(tx, ty)t + y \frac{\partial F_2}{\partial x}(tx, ty)t dt \end{aligned}$$

En utilisant que  $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$  et le calcul du début, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) &= \int_0^1 F_1(tx, ty) + tx \frac{\partial F_1}{\partial x}(tx, ty) + ty \frac{\partial F_1}{\partial y}(tx, ty) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} [tF_1(tx, ty)] dt = [tF_1(tx, ty)]_{t=0}^{t=1} = F_1(x, y). \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \int_0^1 xF_1(tx, ty) + yF_2(tx, ty) dt \right] \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} [xF_1(tx, ty) + yF_2(tx, ty)] dt \\
&= \int_0^1 x \left( \frac{\partial F_1}{\partial x}(tx, ty) \frac{\partial}{\partial y} [tx] + \frac{\partial F_1}{\partial y}(tx, ty) \frac{\partial}{\partial y} [ty] \right) \\
&\quad + F_2(tx, ty) + y \left( \frac{\partial F_2}{\partial x}(tx, ty) \frac{\partial}{\partial y} [tx] + \frac{\partial F_2}{\partial y}(tx, ty) \frac{\partial}{\partial y} [ty] \right) dt \\
&= \int_0^1 F_2(tx, ty) + x \frac{\partial F_1}{\partial y}(tx, ty)t + y \frac{\partial F_2}{\partial y}(tx, ty)t dt
\end{aligned}$$

En utilisant que  $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$  et le calcul du début, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) &= \int_0^1 F_2(tx, ty) + tx \frac{\partial F_2}{\partial x}(tx, ty) + ty \frac{\partial F_2}{\partial y}(tx, ty) dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} [tF_2(tx, ty)] dt = [tF_2(tx, ty)]_{t=0}^{t=1} = F_2(x, y).
\end{aligned}$$

On a donc bien montré que  $\varphi$  est un potentiel de  $F$ .

(ii) On pose

$$\varphi(x, y) = \int_0^1 x \cdot 2 \cdot tx \cdot ty + y((tx)^2 + ty) dt = 3x^2y \int_0^1 t^2 dt + y^2 \int_0^1 t dt = x^2y + \frac{1}{2}y^2,$$

qui, par le point précédent est un potentiel de  $F$ .

(iii) La formule du cours pour un ouvert  $\Omega$  étoilé par rapport à  $x_0$  et un champ vectoriel  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  est

$$\varphi(x, y) = \int_0^1 \langle x - x_0, F(x_0 + t(x - x_0)) \rangle dt$$

Il s'agit de la même formule mais avec  $x_0 = 0$ .