

Exercice 1.

Paramétrer les courbes suivantes

- (i) $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 3 = y^2, x \leq 3\}$
- (ii) $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\}$
- (iii) $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 2(2x + 1)y + (2x + 1)^2 = 0, 1 \leq y \leq 3\}$
- (iv) $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 9, y \geq x\}$.

Solution :

- (i) On résout l'équation $2x - 3 = y^2$ pour $x : x = \frac{y^2 + 3}{2}$. Vu que y va jouer le rôle de notre variable, pour trouver son domaine, on cherche pour quels y on a $x \leq 3$. Or

$$\frac{y^2 + 3}{2} \leq 3 \Leftrightarrow y^2 \leq 3 \Leftrightarrow y \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}].$$

On trouve donc la paramétrisation $\gamma : [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma(t) = \left(\frac{t^2 + 3}{2}, t \right).$$

Remarque : On a résolu $2x - 3 = y^2$ pour x . En théorie on pourrait aussi résoudre cette équation pour y et on obtiendrait $y = \pm\sqrt{2x - 3}$. Le \pm nous donne deux parties de la courbe qu'il faut après remettre ensemble, résultant en plus de travail que ce qu'on a fait ci-dessus.

- (ii) On repère la symétrie et on passe en coordonnées polaires $(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Nos conditions deviennent

$$r^2 = 1, \cos(\theta) \geq 0 \Rightarrow r = 1, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

On trouve donc la paramétrisation $\gamma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)).$$

On pourrait aussi résoudre notre équation $x^2 + y^2 = 1$ pour $x :$

$$x^2 + y^2 = 1 \xrightarrow{x \geq 0} x = \sqrt{1 - y^2}.$$

Pour que $1 - y^2 \geq 0$, on doit avoir $y \in [-1, 1]$. On trouve donc la paramétrisation $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma(t) = (\sqrt{1 - t^2}, t).$$

On pourrait encore résoudre $x^2 + y^2 = 1$ pour y , mais sans information sur le signe de y , on obtient $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, qui a nouveau nous donne deux courbes.

- (iii) Remarquons que

$$y^2 - 2(2x + 1)y + (2x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (y - 2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow y - 2x - 1 = 0.$$

Si on résout ceci pour x , on obtient $x = \frac{y-1}{2}$ avec $y \in [1, 3]$ et donc on trouve la paramétrisation $\gamma : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma(t) = \left(\frac{t-1}{2}, t \right).$$

Si on résout ceci pour y , on obtient $y = 2x + 1$. Puis on regarde pour quels x on a $1 \leq y \leq 3$:

$$1 \leq 2x + 1 \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1,$$

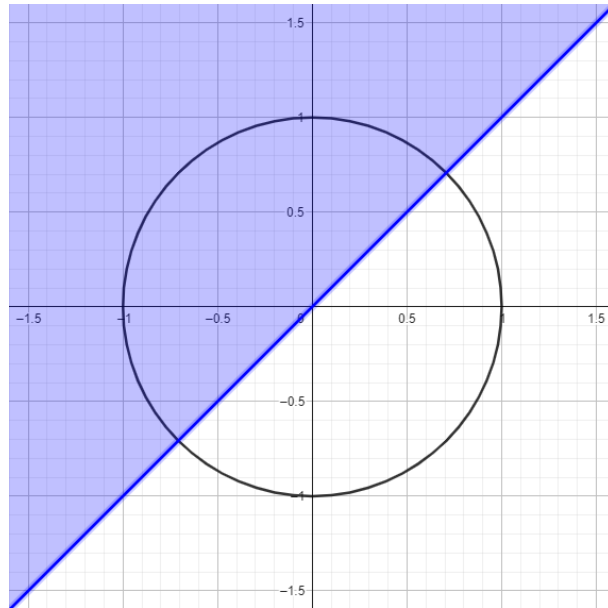
et donc on trouve la paramétrisation $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma(t) = (t, 2t + 1).$$

(iv) On repère la symétrie et on pass en coordonnées polaires $(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)), r \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. Nos conditions deviennent

$$r^3 = 9, \sin(\theta) \geq \cos(\theta) \Leftrightarrow r = 3, \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right]$$

où on a trouvé l'intervalle pour θ en inspectant un cercle trigonométrique :



On trouve donc la paramétrisation $\gamma: \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{3} \right] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma(t) = (3 \cos(t), 3 \sin(t)).$$

Regardons pour cet exemple ce qui se passe si on essaie de résoudre la condition $x^2 + y^2$ pour y (la résoudre pour x est très similaire). On a

$$x^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{9 - x^2}.$$

De plus, $9 - x^2 \geq 0$ implique $x \in [-3, 3]$. Ceci nous donne deux parties de courbes (celle pour $-\sqrt{9 - x^2}$ et celle pour $\sqrt{9 - x^2}$). Pour chaque partie, regardons pour quels x on a $y \geq x$:

Commençons par la partie de la courbe donnée par $y = -\sqrt{9 - x^2}$. On distingue deux cas :

Cas 1 : $x \geq 0$. Dans ce cas, on doit avoir $0 \leq x \leq y = -\sqrt{9 - x^2} \leq 0$ ce qui implique $0 = x = -\sqrt{9 - x^2}$ et qui est impossible.

Cas 2 : $x \leq 0$. Dans ce cas, on doit avoir $x \leq y = -\sqrt{9 - x^2} \leq 0$. Vu que la fonction $z \mapsto z^2$ est décroissante pour $z \leq 0$, on déduit

$$9 - x^2 \leq x^2 \Leftrightarrow 9 \leq 2x^2 \Leftrightarrow |x| \geq \frac{3}{\sqrt{2}} \stackrel{x \leq 0}{\Leftrightarrow} x \leq -\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

On trouve donc la paramétrisation $\varphi: \left[-3, -\frac{3}{\sqrt{2}} \right] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\varphi(t) = (t, -\sqrt{9 - t^2}).$$

Passons à la partie $y = \sqrt{9 - x^2}$. À nouveau, on distingue deux cas :

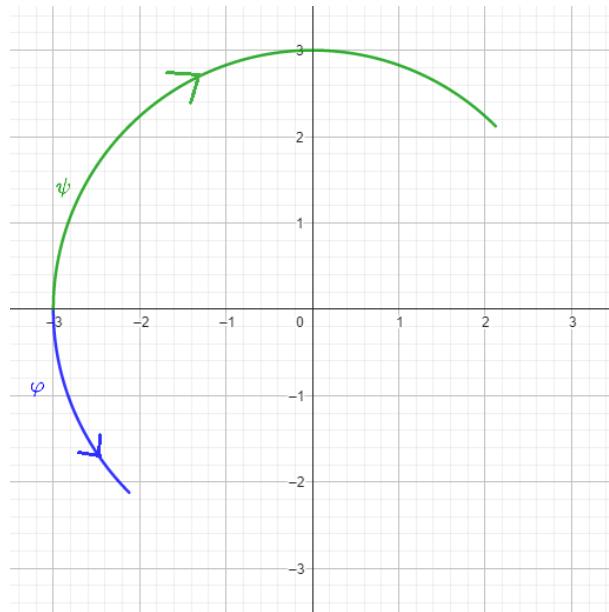
Cas 1 : $x \geq 0$. Dans ce cas, on doit avoir $\sqrt{9 - x^2} = y \geq x \geq 0$. Vu que la fonction $z \mapsto z^2$ est croissante pour $z \geq 0$, on déduit

$$9 - x^2 \geq x^2 \Leftrightarrow |x| \leq \frac{3}{\sqrt{2}} \stackrel{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x \leq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Cas 2 : $x \leq 0$. Dans ce cas, on a toujours $x \leq 0 \leq \sqrt{9 - x^2} = y$.

On trouve donc la paramétrisation $\psi: \left[-3, \frac{3}{\sqrt{2}}\right] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\psi(t) = (t, \sqrt{9 - t^2}).$$



Pour terminer, il faudrait encore changer l'orientation d'une des deux courbes, puis concaténer les deux courbes.

Exercice 2 (ex 2.1, p. 17, corrigé p. 18).

(i) Soit $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), x \in [a, b]\}$. Montrer que :

$$\text{longueur}(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

(ii) En déduire la longueur de la courbe

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \cosh x, x \in [0, 1]\}.$$

(iii) Soit $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = r(t) \cos t; y(t) = r(t) \sin t, t \in [a, b]\}$.

Calculer la longueur de Γ en fonction de r .

Solution :

(i) Γ est paramétrée par $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (t, f(t))$. Ainsi, $\gamma'(t) = (1, f'(t))$ et $|\gamma'(t)| = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$. Pour finir,

$$\text{longueur}(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt,$$

qui est le résultat voulu.

(ii) Si $f(x) = \cosh(x)$, alors, $f'(x) = \sinh(x)$. De plus,

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + (f'(t))^2} &= \sqrt{1 + \sinh(t)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4}} = \sqrt{\frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2} = \sqrt{\cosh(t)^2} = |\cosh(t)| \stackrel{\cosh(t) \geq 0}{=} \cosh(t).\end{aligned}$$

et donc,

$$\text{longueur}(\Gamma) = \int_0^1 \cosh(t) dt = [\sinh(t)]_0^1 = \sinh(1) - \sinh(0) = \sinh(1).$$

(iii) On paramétrise Γ avec $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (r(t) \cos(t), r(t) \sin(t))$. Alors,

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (r'(t) \cos(t) - r(t) \sin(t), r'(t) \sin(t) + r(t) \cos(t)) \\ |\gamma'(t)|^2 &= (r'(t) \cos(t) - r(t) \sin(t))^2 + (r'(t) \sin(t) + r(t) \cos(t))^2 \\ &= r'(t)^2 \cos^2(t) - 2r'(t)r(t) \cos(t) \sin(t) + r(t)^2 \sin^2(t) \\ &\quad + r'(t)^2 \sin^2(t) + 2r'(t)r(t) \cos(t) \sin(t) + r(t)^2 \cos^2(t) \\ &= r'(t)^2 + r(t)^2\end{aligned}$$

et donc,

$$\text{longueur}(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2} dt$$

Exercice 3 (ex 2.4, p. 18, corrigé p. 20).

Calculer $\int_{\Gamma} f dl$ lorsque $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + \sqrt{2z}$ et

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) = \left(\cos t, \sin t, \frac{1}{2}t^2 \right) : t \in [0, 1] \right\}.$$

Indication : $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log(x + \sqrt{x^2 + a^2})$.

Solution :

Vu que f est un champ scalaire, la définition de l'intégrale curviligne est

$$\int_{\Gamma} f dl = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

On a

$$\begin{aligned}f(\gamma(t)) &= \cos^2(t) + \sin^2(t) + \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2} t^2} = 1 + |t| \stackrel{t \in [0, 1]}{=} 1 + t \\ \gamma'(t) &= (-\sin(t), \cos(t), t) \\ |\gamma'(t)| &= \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + t^2} = \sqrt{1 + t^2}\end{aligned}$$

Variante 1 : Calcul avec l'indication. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} f dl &= \int_0^1 (1+t) \sqrt{1+t^2} dt = \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt + \int_0^1 t \sqrt{1+t^2} dt \\ &= \left[\frac{t}{2} \sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \log(t + \sqrt{1+t^2}) \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3} (1+t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}) - 0 \cdot \sqrt{1} - \frac{1}{2} \log(0 + \sqrt{1}) + \frac{1}{3} 2^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \cdot 1 \\ &= \frac{7}{6} \sqrt{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2})\end{aligned}$$

Variante 2 : Changement de variables.

En utilisant que $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt &\stackrel{t=\sinh(u)}{=} \int_0^{\operatorname{arcsinh}(1)} \sqrt{1+\sinh^2(u)} \cosh(u) du = \int_0^{\operatorname{arcsinh}(1)} \sqrt{\cosh^2(u)} \cosh(u) du \\ &\stackrel{\cosh(u) \geq 0}{=} \int_0^{\operatorname{arcsinh}(1)} \cosh^2(u) du = \int_0^{\operatorname{arcsinh}(1)} \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2} \right)^2 du \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\operatorname{arcsinh}(1)} e^{2u} + 2 + e^{-2u} du = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} e^{2u} + 2u - \frac{1}{2} e^{-2u} \right]_0^{\operatorname{arcsinh}(1)} \\ &= \frac{1}{8} e^{2\operatorname{arcsinh}(1)} - \frac{1}{8} e^{-2\operatorname{arcsinh}(1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh}(1) \end{aligned}$$

Cherchons encore la valeur de $\operatorname{arcsinh}(1)$.

Si $a = \operatorname{arcsinh}(b)$, on a

$$\begin{aligned} \sinh(a) &= b \\ \Leftrightarrow \frac{e^a - e^{-a}}{2} &= b \\ \Leftrightarrow (e^a)^2 - 2be^a - 1 &= 0 \\ \Rightarrow e^a &= \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 + 4}}{2} = b \pm \sqrt{1+b^2} \end{aligned}$$

vu que $e^a \geq 0$ et $b - \sqrt{1+b^2} \leq 0$, on doit avoir $e^a = b + \sqrt{1+b^2}$ et donc $a = \log(b + \sqrt{1+b^2})$. Ainsi,

$$\operatorname{arcsinh}(b) = \log(b + \sqrt{1+b^2}) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arcsinh}(1) = \log(1 + \sqrt{2})$$

On conclut donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt &= \frac{1}{8} e^{2\log(1+\sqrt{2})} - \frac{1}{8} e^{-2\log(1+\sqrt{2})} + \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}) \\ &= \frac{1}{8} (1 + \sqrt{2})^2 - \frac{1}{8(1 + \sqrt{2})^2} + \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}) \\ &= \frac{3 + 2\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{8(3 + 2\sqrt{2})} + \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}) \\ &= \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{8(9 - 8)} + \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f dl &= \int_0^1 (1+t) \sqrt{1+t^2} dt = \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt + \int_0^1 t \sqrt{1+t^2} dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}) + \left[\frac{1}{3} (1+t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}) + \frac{1}{3} 2^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \cdot 1 \\ &= \frac{7}{6} \sqrt{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Exercice 4 (ex 2.2, p. 17, corrigé p. 19).

On considère $F(x, y) = (xy, y^2 - x)$ et

$$\Gamma_1 = \{(t, t) : t \in [0, 1]\}, \quad \Gamma_2 = \{(t, e^t) : t \in [0, 1]\}, \quad \Gamma_3 = \{(\sqrt{t}, t^2) : t \in [1, 2]\}.$$

Calculer $\int_{\Gamma_i} F \cdot dl$ pour $i = 1, 2, 3$.

Solution :

Vu que F est un champ vectoriel, la définition de l'intégrale curviligne est

$$\int_{\Gamma} F \cdot dl = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

De plus, pour les champs vectoriels, le signe de l'intégrale curviligne dépend du sens de parcours. On fait les calculs pour les sens de parcours donné par les paramétrisations qui sont données dans les définitions des courbes Γ_i mais ça serait correct de paramétriser autrement et d'obtenir la même chose mais avec le signe opposé.

Commençons par Γ_1 :

On paramétrise Γ_1 avec $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma_1(t) = (t, t)$.

On a alors,

$$\begin{aligned} F(\gamma_1(t)) &= (t^2, t^2 - t) \\ \gamma_1'(t) &= (1, 1) \\ \int_{\Gamma_1} F \cdot dl &= \int_0^1 \langle (t^2, t^2 - t), (1, 1) \rangle dt = \int_0^1 2t^2 - t dt = \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Passons à Γ_2 :

On paramétrise Γ_2 avec $\gamma_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma_2(t) = (t, e^t)$.

On a alors,

$$\begin{aligned} F(\gamma_2(t)) &= (te^t, e^{2t} - t) \\ \gamma_2'(t) &= (1, e^t) \\ \int_{\Gamma_2} F \cdot dl &= \int_0^1 \langle (te^t, e^{2t} - t), (1, e^t) \rangle dt = \int_0^1 e^{3t} dt = \left[\frac{1}{3}e^{3t} \right]_0^1 = \frac{1}{3}(e^3 - 1) \end{aligned}$$

Finissons avec Γ_3 :

On paramétrise Γ_3 avec $\gamma_3: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma_3(t) = (\sqrt{t}, t^2)$

On a alors,

$$\begin{aligned} F(\gamma_3(t)) &= \left(t^{\frac{5}{2}}, t^4 - \sqrt{t} \right) \\ \gamma_3'(t) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, 2t \right) \\ \int_{\Gamma_3} F \cdot dl &= \int_1^2 \left\langle \left(t^{\frac{5}{2}}, t^4 - \sqrt{t} \right), \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, 2t \right) \right\rangle dt = \int_1^2 \frac{1}{2}t^2 + 2t^5 - 2t^{\frac{3}{2}} dt = \left[\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{3}t^6 - \frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}} \right]_1^2 \\ &= \frac{4}{3} + \frac{64}{3} - \frac{16}{5}\sqrt{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{4}{5} = \frac{40 + 640 - 5 - 10 + 24}{30} - \frac{16}{5}\sqrt{2} = \frac{689}{30} - \frac{16}{5}\sqrt{2} \end{aligned}$$

Exercice 5 (ex 2.3, p. 17, corrigé p. 19).

Calculer $\int_{\Gamma} F \cdot dl$ quand

(i) $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$, $F(x, y, z) = (x, z, y)$;

(ii) $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = e^x, z = x, x \in [0, 1]\}$, $F(x, y, z) = (x, y, z)$.

Solution :

- (i) On commence par paramétriser Γ . On observe le terme $x^2 + y^2 = 1$ et on passe en coordonnées cylindriques : $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$. Remarquons que n'importe quel intervalle de longueur 2π fait l'affaire pour θ . On a choisi $[0, 2\pi]$, on aurait pu choisir $[-\pi, \pi]$, ou encore autre chose.

Nos conditions deviennent

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 = 1 &\Leftrightarrow r = 1 \\z = 0 &\text{ change pas}\end{aligned}$$

r et z sont fixés, il ne nous reste que θ qui sera la variable et sur laquelle on n'a aucune conditions. On paramétrise donc Γ avec $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0).$$

On a alors,

$$\begin{aligned}F(\gamma(t)) &= (\cos t, 0, \sin t) \\ \gamma'(t) &= (-\sin t, \cos t, 0)\end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma} F \cdot dl = \int_0^{2\pi} \langle (\cos t, 0, \sin t), (-\sin t, \cos t, 0) \rangle dt = \int_0^{2\pi} -\cos t \sin t dt = \left[\frac{1}{2} \cos^2(t) \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Alternativement, on peut trouver une primitive de $\cos t \sin t$ avec les formules d'Euler :

$$\cos t \sin t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{1}{2} \frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i} = \frac{1}{2} \sin(2t)$$

dont on sait calculer une primitive.

(ii) Variante 1 : x est la variable de la paramétrisation.

C'est le plus naturel vu que y et z s'écrivent comme une fonction de x et on a un intervalle pour x .

On paramétrise donc Γ avec $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\gamma(t) = (t, e^t, t)$$

On a alors,

$$\begin{aligned}F(\gamma(t)) &= (t, e^t, t) \\ \gamma'(t) &= (1, e^t, 1)\end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma} F \cdot dl = \int_0^1 \langle (t, e^t, t), (1, e^t, 1) \rangle dt = \int_0^1 e^{2t} + 2t dt = \left[\frac{1}{2} e^{2t} + t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} e^2 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{e^2 + 1}{2}$$

Variante 2 : y est la variable de la paramétrisation.

Nos conditions sont équivalentes à

$$x = \log(y) \quad z = x = \log(y).$$

De plus, pour que $x \in [0, 1]$, on a besoin que $y \in [1, e]$. Ainsi, on peut paramétriser Γ avec $\gamma: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\gamma(t) = (\log(t), t, \log(t)).$$

On a alors,

$$\begin{aligned}F(\gamma(t)) &= (\log(t), t, \log(t)) \\ \gamma'(t) &= \left(\frac{1}{t}, 1, \frac{1}{t} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} F \cdot dl &= \int_1^e \left\langle (\log(t), t, \log(t)), \left(\frac{1}{t}, 1, \frac{1}{t} \right) \right\rangle dt = \int_1^e 2 \frac{\log(t)}{t} + t dt = \left[\log(t)^2 + \frac{1}{2} t^2 \right]_1^e \\ &= 1 + \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} = \frac{1 + e^2}{2}\end{aligned}$$

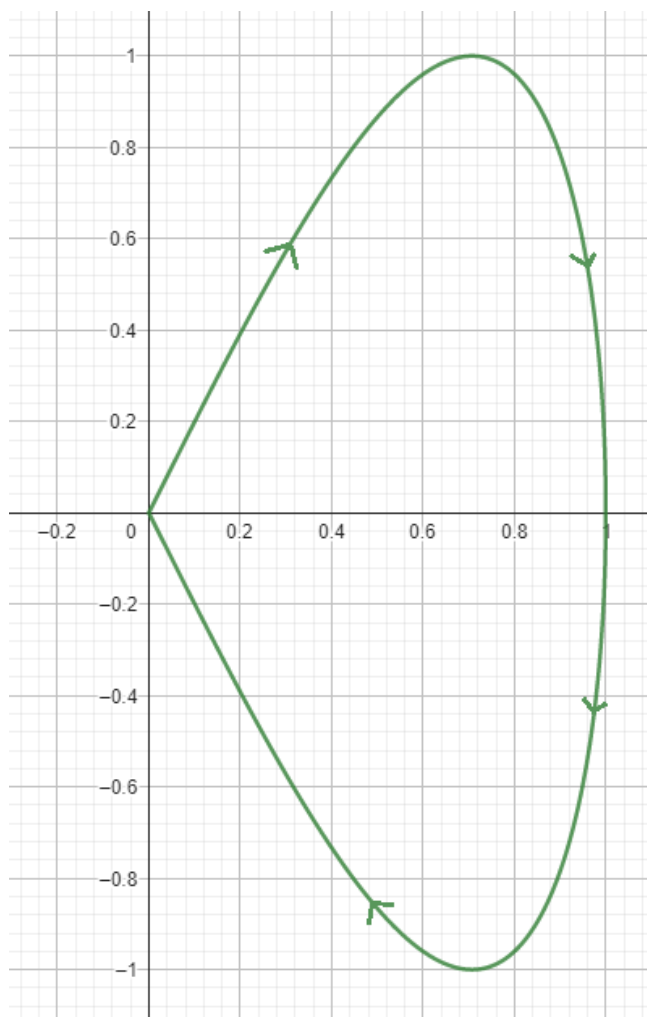
Variante 3 : z est la variable de la paramétrisation.

On obtient alors exactement la même chose que dans la variante 1.

Exercice 6 (ex 2.6, p. 18, corrigé p. 20).

Soient $F(x, y) = (x + y, -x)$ et $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + 4x^4 - 4x^2 = 0, x \geq 0\}$ paramétrée par $\gamma(t) = (\sin t, \sin(2t))$ avec $t \in [0, \pi]$.

1. Montrer que γ est bien une paramétrisation de Γ .
2. Calculer $\int_{\Gamma} F \cdot dl$.



Solution :

On fait ici la démonstration rigoureuse que γ est une paramétrisation de Γ . On doit montrer trois choses :

- (i) γ est injective sur $]0, \pi[$
- (ii) $\forall t \in [0, \pi], t \in \Gamma$
- (iii) $\forall (x, y) \in \Gamma, \exists t \in [0, \pi]$ tel que $(x, y) = \gamma(t)$.

Ce niveau de détail n'est pas nécessaire dans l'examen : pour les paramétrisations, il vous sera généralement demandé d'en trouver une, pas de démontrer que c'en est bien une. On le fait néanmoins ici une fois pour voir à quoi ça ressemble.

- (i) Soient $t, s \in]0, \pi[$ tels que

$$\begin{cases} \sin(t) = \sin(s) & (1) \\ \sin(2t) = \sin(2s) & (2) \end{cases}$$

Alors, (1) $\Rightarrow s = \pi - t$ ou $s = t$. si $s = t$, on a le résultat voulu. Si $t = \pi - s$, en injectant ceci dans (2), on obtient $\sin(2\pi - 2s) = \sin(2s)$. Vu que $\sin(2\pi - 2s) = -\sin(2s)$, on déduit que

$\sin(2s) = 0$. Or, $2s \in]0, 2\pi[$ et la seule solution de $\sin(x) = 0$ dans $]0, 2\pi[$ est $x = \pi$. Ainsi, $2s = \pi$ et donc $s = \frac{\pi}{2}$ et donc $t = \pi - s = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = s$, qui est le résultat voulu.

(ii) On a pour tout t ,

$$\begin{aligned} \sin^2(2t) + 4 \cos^4(t) - 4 \cos^2(t) &= \left(\frac{e^{i2t} - e^{-i2t}}{2i} \right)^2 + 4 \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^4 - 4 \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{-1}{4} (e^{i4t} - 2 + e^{-i4t}) + \frac{1}{4} \left(e^{i4t} + 4e^{i3t}e^{-it} + \binom{4}{2} e^{i2t}e^{-i2t} + 4e^{it}e^{-i3t} + e^{-i4t} \right) \\ &\quad - (e^{i2t} + 2 + e^{-i2t}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{6}{4} - 2 = 0 \end{aligned}$$

(iii) Soit $(x, y) \in \Gamma$. Commençons par remarquer que

$$\begin{aligned} y^2 + 4x^4 - 4x^2 = 0 &\implies 4x^4 - 4x^2 = -y^2 \\ &\implies 4x^4 - 4x^2 \leq 0 \\ &\implies 4x^2(x^2 - 1) \leq 0 \\ &\stackrel{x \geq 0}{\implies} x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$y^2 = 4x^2 - 4x^4 = 4x^2(1 - x^2) \stackrel{x \in [0,1]}{\implies} |y| = 2x\sqrt{1 - x^2}$$

On distingue maintenant 2 cas en fonction du signe de y . L'idée de la distinction vient soit du dessin de la courbe où on voit que sur la première moitié du chemin $y \geq 0$ et sur la deuxième, $y \leq 0$ ou en voyant que pour $t \in [0, \pi]$, $\sin(2t) \geq 0 \Leftrightarrow 2t \in [0, \pi] \Leftrightarrow t \in [0, \pi/2]$.

Cas 1 : $y \geq 0$.

Vu que $x \in [0, 1]$, il existe $t \in [0, \pi/2]$ tel que $x = \sin(t)$. De plus, on a alors, vu que $y \geq 0$,

$$\begin{aligned} y = 2x\sqrt{1 - x^2} &= 2 \sin(t) \sqrt{1 - \sin^2(t)} = 2 \sin(t) \sqrt{\cos^2(t)} \stackrel{t \in [0, \pi/2] \implies \cos(t) \geq 0}{=} 2 \sin(t) \cos(t) \\ &= 2 \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{e^{i2t} - e^{-i2t}}{2i} = \sin(2t), \end{aligned}$$

et donc $(x, y) = \gamma(t)$.

Cas 2 : $y \leq 0$.

Vu que $x \in [0, 1]$, il existe $t \in [\pi/2, \pi]$ tel que $x = \sin(t)$. De plus, on a alors, vu que $y \leq 0$,

$$\begin{aligned} y &= -2x\sqrt{1 - x^2} = -2 \sin(t) \sqrt{1 - \sin^2(t)} \\ &= -2 \sin(t) \sqrt{\cos^2(t)} \stackrel{t \in [\pi/2, \pi] \implies \cos(t) \leq 0}{=} -2 \sin(t) (-\cos(t)) = \sin(2t), \end{aligned}$$

et donc $(x, y) = \gamma(t)$.

Ceci montre bien que γ est une paramétrisation de Γ .