

Notation.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert, $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, tel que $\mathbf{F} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $1 \leq i \leq m$. On note

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial F_n}{\partial x_i} \right).$$

Exercice 1.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert, $\mathbf{F}, \mathbf{G} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $1 \leq i \leq m$. Montrer que

(i)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [\langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle] = \left\langle \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i}, \mathbf{G} \right\rangle + \left\langle \mathbf{F}, \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_i} \right\rangle,$$

où pour $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, on note $\langle a, b \rangle$ le *produit scalaire euclidien* de a et b , c'est-à-dire,

$$\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

(ii) si $n = 3$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [\mathbf{F} \wedge \mathbf{G}] = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} \wedge \mathbf{G} + \mathbf{F} \wedge \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_i}$$

où pour $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, on note $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ le *produit vectoriel* de a et b , c'est-à-dire,

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Solution :

(i) On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} [\langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle] &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^n F_j G_j \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [F_j G_j] \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} G_j + F_j \frac{\partial G_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_i} G_j + \sum_{j=1}^n F_j \frac{\partial G_j}{\partial x_i} \\ &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i}, \mathbf{G} \right\rangle + \left\langle \mathbf{F}, \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_i} \right\rangle \end{aligned}$$

(ii) On montre le résultat pour la première composante. La preuve pour les autres est en tous

points similaire. On a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x_i} [\mathbf{F} \wedge \mathbf{G}]\right)_1 &= \frac{\partial}{\partial x_i} [(\mathbf{F} \wedge \mathbf{G})_1] \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} [F_2 G_3 - F_3 G_2] \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} [F_2 G_3] - \frac{\partial}{\partial x_i} [F_3 G_2] \\
&= \frac{\partial F_2}{\partial x_i} G_3 + F_2 \frac{\partial G_3}{\partial x_i} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_i} G_2 + F_3 \frac{\partial G_2}{\partial x_i} \right) \\
&= \frac{\partial F_2}{\partial x_i} G_3 - \frac{\partial F_3}{\partial x_i} G_2 + F_2 \frac{\partial G_3}{\partial x_i} - F_3 \frac{\partial G_2}{\partial x_i} \\
&= \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i}\right)_2 G_3 - \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i}\right)_3 G_2 + F_2 \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_i}\right)_3 - F_3 \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_i}\right)_2 \\
&= \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} \wedge \mathbf{G}\right)_1 + \left(\mathbf{F} \wedge \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_i}\right)_1 \\
&= \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} \wedge \mathbf{G} + \mathbf{F} \wedge \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_i}\right)_1,
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.

Théorème.

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega' \subset \mathbb{R}^m$ $f \in C^1(\Omega')$ et $g = (g_1, \dots, g_m) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tel que $g(\Omega) \subset \Omega'$. Alors, le produit de composition $f \circ g \in C^1(\Omega)$ et pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(g(x)) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x).$$

Exercice 2. (i) Soit $p \geq 1$ et la fonction

$$h_p(x) := |x|^p = \left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right)^p, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Calculer $\nabla h_p(x)$.

(ii) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, une application $\mathbf{G} \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ qui ne s'annule jamais et la fonction

$$f_p(t) := \frac{1}{p} |\mathbf{G}(tx)|^p, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Calculer $\frac{d}{dt} f_p(t)$.

Solution :

(i) Un calcul nous donne

$$\frac{\partial}{\partial x_i} |x| = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} \right] = \frac{1}{2\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^n x_j^2 \right] = \frac{1}{2|x|} \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} [x_j^2]}_{=0 \text{ si } i \neq j \text{ et } =2x_i \text{ si } i=j} = \frac{x_i}{|x|}.$$

Donc,

$$\nabla (|x|) = \frac{x}{|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Par conséquent,

$$\nabla (|x|^p) = p|x|^{p-1} \nabla (|x|) = p|x|^{p-2} x.$$

Remarquons que cette fonction est bien définie en 0 si $p \geq 2$.

(ii) Notons,

$$\begin{aligned} h_p: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto h_p(u) \\ \mathbf{G}: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n : v \mapsto \mathbf{G}(v) \\ \gamma: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n : t \mapsto \gamma(t) = tx, \end{aligned}$$

de telle sorte que

$$f_p = \frac{1}{p} h_p \circ \mathbf{G} \circ \gamma.$$

Ainsi, les formules classiques de dérivation d'un produit de composition donnent

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f_p(t) &= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_p}{\partial u_i} (\mathbf{G}(\gamma(t))) \frac{dG_i \circ \gamma}{dt}(t) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_p}{\partial u_i} (\mathbf{G}(\gamma(t))) \sum_{j=1}^n \frac{\partial G_i}{\partial v_j} (\gamma(t)) \frac{d\gamma^j}{dt}(t). \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{\partial h_p}{\partial u_i}(u) = p|u|^{p-2}u_i \quad \text{et} \quad \frac{d\gamma^j}{dt}(t) = x_j.$$

On obtient donc,

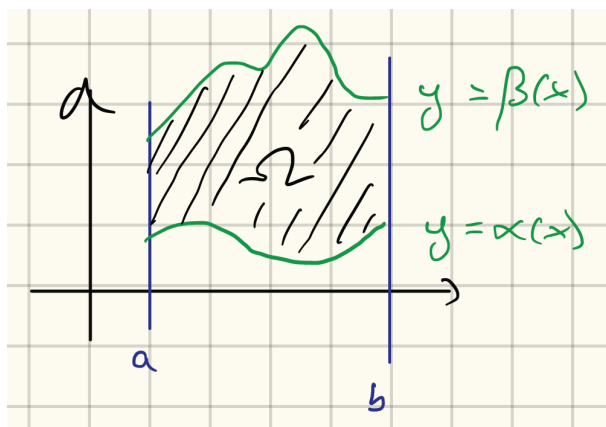
$$\frac{d}{dt} f_p(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |G(tx)|^{p-2} G_i(tx) \frac{\partial G_i}{\partial v_j}(tx) x_j.$$

Définition.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

(i) On dit que Ω est *y-simple* si il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $\alpha, \beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\forall x \in]a, b[, \alpha(x) < \beta(x)$ tels que

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

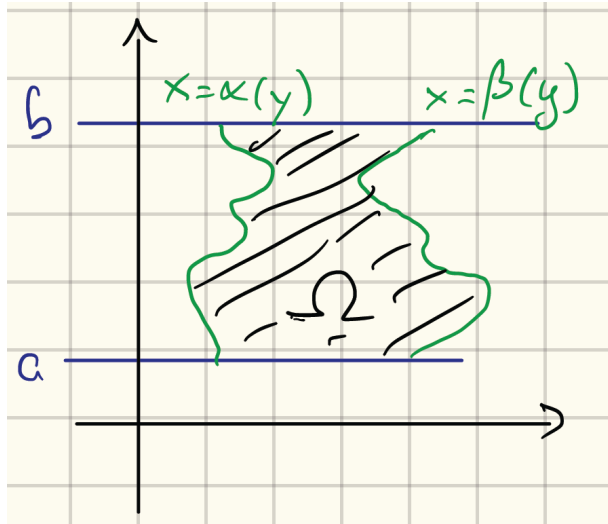


On a alors que

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy dx.$$

(ii) On dit que Ω est *x-simple* si il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $\alpha, \beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\forall y \in]a, b[, \alpha(y) < \beta(y)$ tels que

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [a, b], \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$$



On a alors que

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx dy.$$

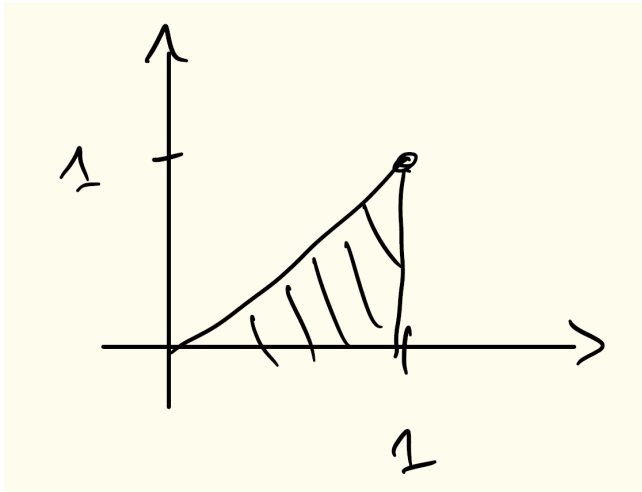
Exercice 3.

Esquisser l'ensemble A et calculer $\int_A f(x) dx$ dans les cas suivants :

- (i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], 0 \leq y \leq x\}$, $f(x, y) = xy$.
- (ii) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2x, x \geq 1\}$, $f(x, y) = \frac{2}{x}$.
- (iii) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3, x - 3 \leq y \leq 3 - x\}$ et $f(x, y) = x^2 + \sin^3(y)$
- (iv) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y, \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\}$, $f(x, y) = y \sin(xy)$.

Solution :

- (i) Esquisse



Variante 1 : y-simple.

On observe que A est y simple avec $\alpha(x) = 0$, $\beta(x) = x$ pour $x \in [0, 1]$. Ainsi,

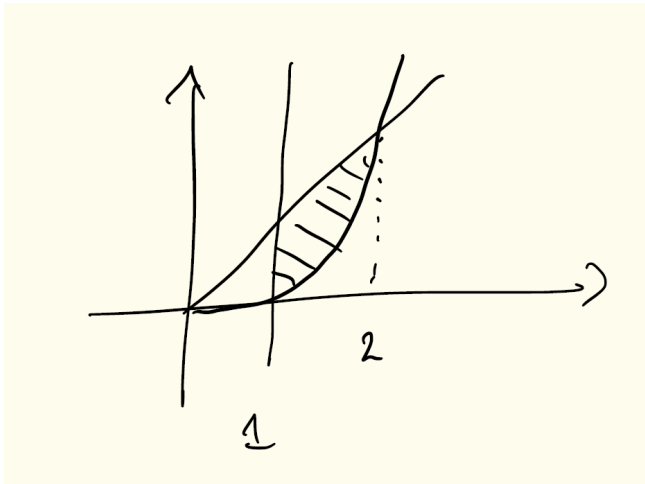
$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_0^x xy dy dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x^3 dx \\ &= \left[\frac{1}{8} x^4 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Variante 2 : x-simple.

On observe que A est x simple avec $\alpha(y) = y$, $\beta(y) = 1$ pour $y \in [0, 1]$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_y^1 xy dx dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 y \right]_{x=y}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} x^3 dx \\ &= \left[\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{8} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

(ii) Esquisse



Commençons par vérifier pour quels x , on a $x^2 \leq 2x$. On a

$$x^2 \leq 2x \Leftrightarrow x(x-2) \leq 0.$$

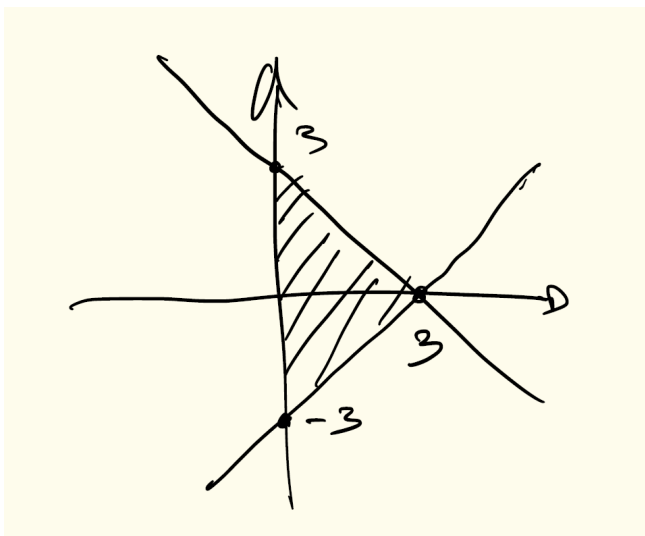
En faisant un tableau des signes, on observe que ceci est vrai pour $x \in [0, 2]$. Ceci ensemble avec la condition que $x \geq 1$, donne

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}.$$

On observe que A est y simple avec $\alpha(x) = x^2$, $\beta(x) = 2x$ pour $x \in [1, 2]$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dx dy &= \int_1^2 \int_{x^2}^{2x} \frac{2}{x} dy dx = \int_1^2 \left[\frac{2y}{x} \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx = \int_1^2 4 - 2x dx \\ &= \left[4x - x^2 \right]_{x=1}^{x=2} = 8 - 4 - 4 + 1 = 1 \end{aligned}$$

(iii) Esquisse



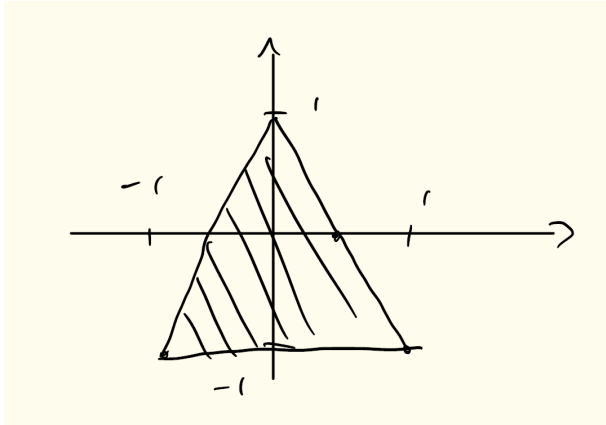
On utilise que A est y -simple (on a bien que pour $0 < x < 3$, $x - 3 < 3 - x$)

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dx dy &= \int_0^3 \int_{x-3}^{3-x} f(x, y) dy dx \\ &= \int_0^3 \int_{x-3}^{3-x} x^2 + \sin^3(y) dy dx \\ &= \int_0^3 (6 - 2x)x^2 dx + \underbrace{\int_0^3 \int_{x-3}^{3-x} \sin^3(y) dy dx}_{=0}. \end{aligned}$$

Où la deuxième intégrale est nulle vu qu'on intègre une fonction impaire sur un intervalle symétrique centré en 0. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_A f(y) dy &= \int_0^3 6x^2 - 2x^3 dx \\ &= \left[2x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right]_{x=0}^{x=3} \\ &= \frac{27}{2} \end{aligned}$$

(iv) Esquisse



Commençons par vérifier pour quels y , $\frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$. On a

$$\frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y \leq 1.$$

Ensemble avec la condition $y \geq -1$, on obtient que A est x -simple avec $\alpha(y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$ et $\beta(y) = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$ pour $y \in [-1, 1]$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^1 \int_{\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}} y \sin(xy) dx dy \\ &= \int_{-1}^1 [-\cos(xy)]_{x=\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}}^{x=-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}} dy \\ &= \int_{-1}^1 \underbrace{-\cos\left(-\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y\right) + \cos\left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y\right)}_{=0} dy = 0 \end{aligned}$$

Définition (Matrice jacobienne, Jacobien).

Soit $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n): \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega' \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ telle que

- $\mathbf{u} \in C^\infty(\Omega; \Omega')$
- \mathbf{u} est inversible et $\mathbf{u}^{-1} \in C^\infty(\Omega'; \Omega)$

La matrice Jacobienne de \mathbf{u} notée $\nabla \mathbf{u}$ est la matrice dont les composantes sont

$$(\nabla \mathbf{u})_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Le jacobien de \mathbf{u} , noté $\text{Jac } \mathbf{u}(\mathbf{x})$ est défini par

$$\text{Jac } \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \det \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})$$

Théorème (Voir aussi §8.5 du livre *Analyse avancée pour ingénieurs*).

Soit $f: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $\mathbf{u}: \Omega \rightarrow \Omega'$ comme dans la définition ci-dessus et $A \subset \Omega'$ un ensemble fermé borné. Alors

$$\int_A f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\mathbf{u}^{-1}(A)} f(\mathbf{u}(x)) |\text{Jac } \mathbf{u}(x)| dx$$

Exercice 4.

On admettra sans démonstration que si $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2), c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ sont trois points non-alignés $A = \{(t_1, t_2) : 0 \leq t_1 \leq 1, 0 \leq t_2 \leq 1 - t_1\}$ et $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est définie par

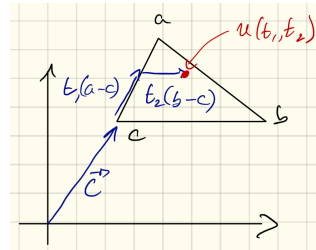
$$u(t_1, t_2) = t_1 a + t_2 b + (1 - t_1 - t_2)c = c + t_1(a - c) + t_2(b - c),$$

Alors,

— u est inversible,

— $u, u^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$,

— $u(A)$ est le triangle de sommets a, b et c .



(i) Calculer le jacobien de u .

(ii) Calculer l'aire d'un triangle en fonction de ses trois sommets a, b et c .

Rappel : L'aire d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est donnée par

$$\iint_{\Omega} 1 dx dy$$

Solution :

(i) On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t_1}(t_1, t_2) &= a_1 - c_1 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t_1}(t_1, t_2) &= a_2 - c_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t_2}(t_1, t_2) &= b_1 - c_1 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t_2}(t_1, t_2) &= b_2 - c_2 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{Jac}(u)(t_1, t_2) &= \det \begin{pmatrix} a_1 - c_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 - c_2 & b_2 - c_2 \end{pmatrix} \\ &= (a_1 - c_1)(b_2 - c_2) - (a_2 - c_2)(b_1 - c_1) \\ &= a_1 b_2 - b_2 c_1 - a_1 c_2 + c_1 c_2 - (a_2 b_1 - b_1 c_2 - a_2 c_1 + c_1 c_2) \\ &= a_1 b_2 + b_1 c_2 + a_2 c_1 - a_2 b_1 - b_2 c_1 - a_1 c_2 \end{aligned}$$

(ii) On a, si Ω est le triangle de sommets a , b et c ,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} 1 dx dy &= \iint_A |\text{Jac}(u)(t_1, t_2)| dt_1 dt_2 \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-t_1} |a_1 b_2 + b_1 c_2 + a_2 c_1 - a_2 b_1 - b_2 c_1 - a_1 c_2| dt_2 dt_1 \\ &= |a_1 b_2 + b_1 c_2 + a_2 c_1 - a_2 b_1 - b_2 c_1 - a_1 c_2| \int_0^1 (1-t_1) dt_1 \\ &= \frac{1}{2} |a_1 b_2 + b_1 c_2 + a_2 c_1 - a_2 b_1 - b_2 c_1 - a_1 c_2| \end{aligned}$$

Exercice 5 (Voir aussi §8.5 du livre *Analyse avancée pour ingénieurs*).

Calculer le jacobien des applications suivantes :

(i) Les coordonnées polaires

$$\mathbf{u}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

(ii) Les coordonnées sphériques

$$\mathbf{u}(r, \theta, \varphi) = (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi)$$

(iii) Les coordonnées cylindriques

$$\mathbf{u}(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

(iv) Les coordonnées carthésiennes.

$$\mathbf{u}(x, y, z) = (x, y, z)$$

Solution :

(i) On calcule

$$\text{Jac}(u)(r, \theta) = \det \nabla u(r, \theta) = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} = r.$$

(ii) On calcule

$$\begin{aligned} \text{Jac}(u)(r, \theta, \varphi) &= \det \nabla u(r, \theta, \varphi) \\ &= \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) \sin(\varphi) & -r \sin(\theta) \sin(\varphi) & r \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & r \cos(\theta) \sin(\varphi) & r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & 0 & -r \sin(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= -r^2 \sin(\varphi). \end{aligned}$$

(iii) On calcule

$$\text{Jac}(u)(r, \theta, z) = \det \nabla u(r, \theta, z) = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r.$$

(iv) On calcule

$$\text{Jac}(u)(x, y, z) = \det \nabla u(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Exercice 6.

Esquisser l'ensemble A et calculer $\int_A f(x) dx$ dans les cas suivants :

(i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ et $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$

(ii) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 3\}$ et $f(x, y, z) = \frac{z}{\pi\sqrt{x^2+y^2}}$

(iii) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$ et $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$

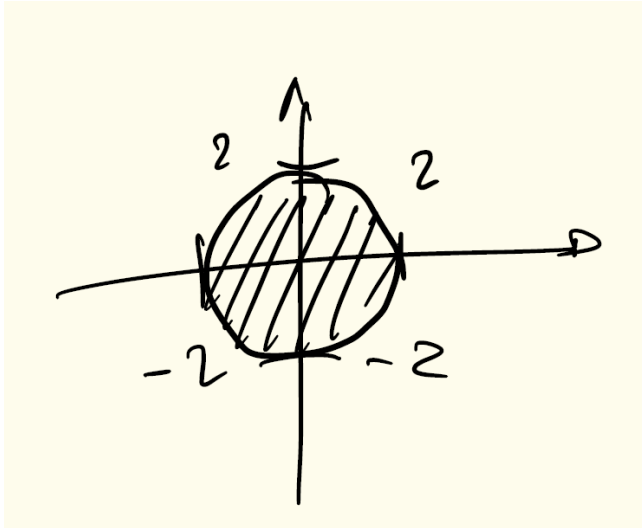
Rappel :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (t - \sin(t) \cos(t)) \right] = \sin^2(t)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (t + \sin(t) \cos(t)) \right] = \cos^2(t)$$

Solution :

(i) Esquisse



Le terme $x^2 + y^2$ dans la description de A nous indique qu'il est judicieux d'utiliser les coordonnées polaires : $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$x^2 + y^2 \leq 4 \iff r^2 \leq 4 \stackrel{r \geq 0}{\iff} 0 \leq r \leq 2.$$

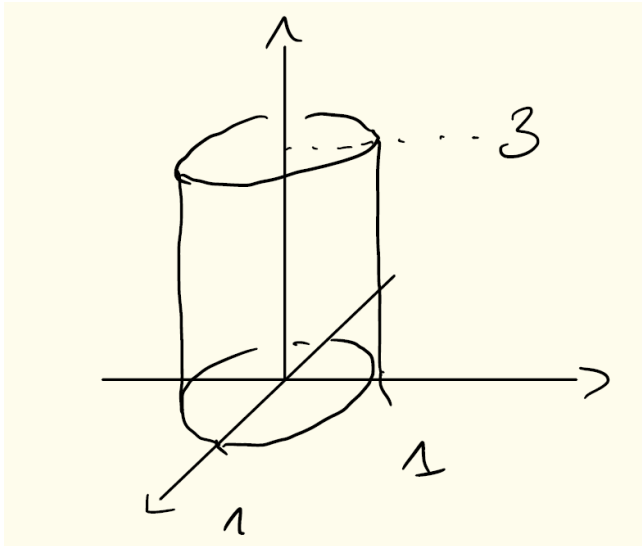
Ainsi,

$$A = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \mid r \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi]\}$$

et on calcule

$$\begin{aligned} \int_A f(y) dy &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} r d\theta dr \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

(ii) Esquisse



Le terme $x^2 + y^2$ dans la description de A nous indique qu'il est judicieux d'utiliser les coordonnées cylindriques : $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ avec $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ et $z \in \mathbb{R}$,

$$x^2 + y^2 \leq 1 \iff r^2 \leq 1 \stackrel{r \geq 0}{\iff} 0 \leq r \leq 1$$

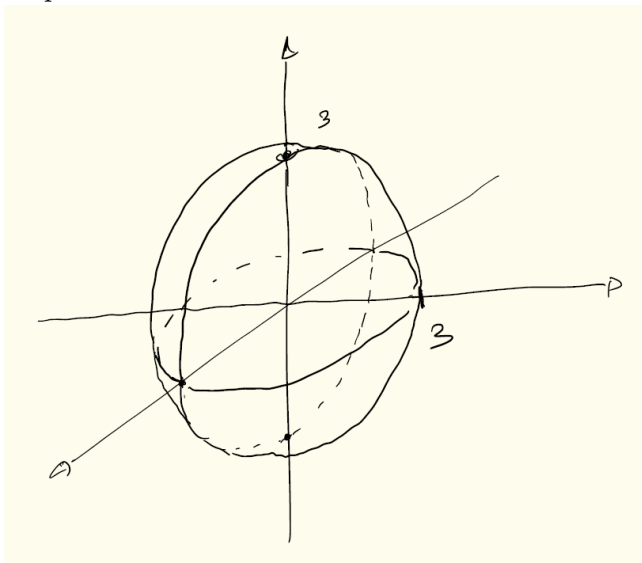
Ainsi,

$$A = \{(r \cos \theta, r \sin \theta, z) : r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, 3]\}$$

et on calcule

$$\int_A f(y) dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^3 \frac{z}{\pi r} r dz dr d\theta = \int_0^3 2z dz = [z^2]_{z=0}^{z=3} = 9.$$

(iii) Esquisse



Le terme $x^2 + y^2 + z^2$ dans la description de A indique qu'il est judicieux d'utiliser les coordonnées sphériques : $(x, y, z) = (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi)$ avec $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ et $\varphi \in [0, \pi]$,

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 3 \iff r^2 \leq 3 \stackrel{r \geq 0}{\iff} 0 \leq r \leq \sqrt{3}$$

Ainsi,

$$A = \{(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) \mid r \in [0, \sqrt{3}], \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi]\}$$

et on calcule

$$\begin{aligned}\int_A f(y)dy &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r \sin \varphi r^2 \sin \varphi d\varphi d\theta dr \\ &= 2\pi \int_0^3 r^3 dr \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi\end{aligned}$$

On rappelle que

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (t - \sin(t) \cos(t)) \right] = \sin^2(t).$$

D'où,

$$\begin{aligned}\int_A f(y)dy &= 2\pi \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_{r=0}^{r=3} \left[\frac{1}{2} (\varphi - \sin(\varphi) \cos(\varphi)) \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \\ &= \frac{81}{4} \pi^2.\end{aligned}$$

Remarque.

Le but de l'exercice suivant est d'établir des formules qui nous permettent de trouver une primitive des fonctions $\sin^n(x)$ et $\cos^n(x)$ qui seront utiles dans les calculs tout au long du semestre.

Exercice 7. (i) (Facultatif) Soit $n \geq 1$ un entier. À l'aide des formules d'Euler, et du binôme de Newton, montrer que si n est pair,

$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{n/2} + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{k} \cos((n-2k)x)$$

$$\sin^n(x) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{n/2} + \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n/2-1} (-1)^k \binom{n}{k} \cos((n-2k)x)$$

Et si n est impair,

$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{k} \cos((n-2k)x)$$

$$\sin^n(x) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \binom{n}{k} \sin((n-2k)x)$$

Indication : Pour le sinus, utiliser que si n est pair $(-1)^{n-k} = (-1)^k$ et si n est impair, $(-1)^{n-k} = -(-1)^k$

(ii) Trouver une primitive des fonctions suivantes :

- | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|
| (a) $\cos^2(x)$ | (c) $\cos^3(x)$ | (e) $\cos^4(x)$ | (g) $\cos^5(x)$ |
| (b) $\sin^2(x)$ | (d) $\sin^3(x)$ | (f) $\sin^4(x)$ | (h) $\sin^5(x)$. |

Solution :

(i) Si n est pair, on a

$$\begin{aligned}\cos^n(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(n-k)x} e^{-ikx} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(n-2k)x} \\ &= \frac{1}{2^n} \left(\sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{k} e^{i(n-2k)x} + \binom{n}{n/2} + \sum_{k=n/2+1}^n \binom{n}{k} e^{i(n-2k)x} \right).\end{aligned}$$

En faisant le changement de variables $k = n - j$ et en renommant j en k dans la deuxième somme on trouve

$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{n/2} + \frac{1}{2^n} \left(\sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{k} e^{i(n-2k)x} + \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{n-k} e^{i(n-2(n-k))x} \right).$$

En utilisant que $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ et $n - 2(n - k) = -(n - 2k)$, on déduit

$$\begin{aligned}\cos^n(x) &= \frac{1}{2^n} \binom{n}{n/2} + \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{k} (e^{i(n-2k)x} + e^{-i(n-2k)x}) \\ &= \frac{1}{2^n} \binom{n}{n/2} + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{k} \left(\frac{e^{i(n-2k)x} + e^{-i(n-2k)x}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \binom{n}{n/2} + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{k} \cos((n-2k)x)\end{aligned}$$

qui est la formule pour le cosinus qu'on voulait établir.

Pour le sinus, on a

$$\begin{aligned}\sin^n(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^n = \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(n-k)x} (-1)^k e^{-ikx} = \frac{(-1)^{n/2}}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{i(n-2k)x} \\ &= \frac{(-1)^{n/2}}{2^n} \left(\sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{k} (-1)^k e^{i(n-2k)x} + \binom{n}{n/2} (-1)^{n/2} + \sum_{k=n/2+1}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{i(n-2k)x} \right).\end{aligned}$$

En faisant le changement de variables $k = n - j$ et en renommant j en k dans la deuxième somme on trouve

$$\begin{aligned}\sin^n(x) &= \frac{1}{2^n} \binom{n}{n/2} \\ &+ \frac{(-1)^{n/2}}{2^n} \left(\sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{k} (-1)^k e^{i(n-2k)x} + \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{n-k} (-1)^{n-k} e^{i(n-2(n-k))x} \right)\end{aligned}$$

En utilisant que $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, $(-1)^{n-k} = (-1)^k$ et $n - 2(n - k) = -(n - 2k)$, on déduit

$$\begin{aligned}\sin^n(x) &= \frac{1}{2^n} \binom{n}{n/2} + \frac{(-1)^{n/2}}{2^n} \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{k} (-1)^k (e^{i(n-2k)x} + e^{-i(n-2k)x}) \\ &= \frac{1}{2^n} \binom{n}{n/2} + \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{k} (-1)^k \left(\frac{e^{i(n-2k)x} + e^{-i(n-2k)x}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \binom{n}{n/2} + \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{k} (-1)^k \cos((n-2k)x),\end{aligned}$$

qui est le résultat voulu pour le sinus.

Si n est impair, on a

$$\begin{aligned}\cos^n(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(n-k)x} e^{-ikx} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(n-2k)x} \\ &= \frac{1}{2^n} \left(\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{k} e^{i(n-2k)x} + \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^n \binom{n}{k} e^{i(n-2k)x} \right)\end{aligned}$$

En faisant le changement de variables $k = n - j$ et en renommant j en k dans la deuxième somme on trouve

$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^n} \left(\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{k} e^{i(n-2k)x} + \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{n-k} e^{i(n-2(n-k))x} \right).$$

En utilisant que $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ et $n - 2(n - k) = -(n - 2k)$, on déduit

$$\begin{aligned}\cos^n(x) &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{k} (e^{i(n-2k)x} + e^{-i(n-2k)x}) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{k} \left(\frac{e^{i(n-2k)x} + e^{-i(n-2k)x}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{k} \cos((n - 2k)x),\end{aligned}$$

qui est le résultat voulu pour le cosinus.

Pour le sinus, on a

$$\begin{aligned}\sin^n(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^n = \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(n-k)x} (-1)^k e^{-ikx} = \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{i(n-2k)x} \\ &= \frac{1}{(2i)^n} \left(\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{k} (-1)^k e^{i(n-2k)x} + \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{i(n-2k)x} \right)\end{aligned}$$

En faisant le changement de variables $k = n - j$ et en renommant j en k dans la deuxième somme on trouve

$$\sin^n(x) = \frac{1}{(2i)^n} \left(\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{k} (-1)^k e^{i(n-2k)x} + \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{n-k} (-1)^{n-k} e^{i(n-2(n-k))x} \right).$$

En utilisant que $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, $(-1)^{n-k} = -(-1)^k$ et $n - 2(n - k) = -(n - 2k)$, on déduit

$$\begin{aligned}\sin^n(x) &= \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \binom{n}{k} (e^{i(n-2k)x} - e^{-i(n-2k)x}) \\ &= \frac{1}{(2i)^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{e^{i(n-2k)x} - e^{-i(n-2k)x}}{2i} \right) \\ &= \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \binom{n}{k} \sin((n - 2k)x)\end{aligned}$$

(ii) On a, par (i) que si n est pair,

$$\int \cos^n(x) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{n/2} x + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{k} \frac{1}{n-2k} \sin((n-2k)x)$$

$$\int \sin^n(x) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{n/2} x + \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n/2-1} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{n-2k} \sin((n-2k)x)$$

Et si n est impair,

$$\int \cos^n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{k} \frac{1}{n-2k} \sin((n-2k)x)$$

$$\int \sin^n(x) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{n-2k} \binom{n}{k} \cos((n-2k)x)$$

Ainsi,

$$(a) \int \cos^2(x) = \frac{1}{4} \binom{2}{1} x + \frac{1}{2} \sin(2x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin(2x).$$

$$(b) \int \sin^2(x) = \frac{1}{4} \binom{2}{1} x + \frac{-1}{2} \sin(2x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin(2x)$$

$$(c) \int \cos^3(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} \sin(3x) + 3 \sin(x) \right) = \frac{3}{4} \sin(x) + \frac{1}{12} \sin(3x)$$

$$(d) \int \sin^3(x) = \frac{-1}{4} \left(\frac{-1}{3} \cos(3x) + 3 \cos(x) \right) = -\frac{3}{4} \cos(x) + \frac{1}{12} \cos(3x)$$

$$(e) \int \cos^4(x) = \frac{1}{16} \binom{4}{2} x + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \sin(4x) + 4 \frac{1}{2} \sin(2x) \right) = \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{32} \sin(4x)$$

$$(f) \int \sin^4(x) = \frac{1}{16} \binom{4}{2} x + \frac{1}{8} \left(\frac{-1}{4} \sin(4x) + 4 \frac{1}{2} \sin(2x) \right) = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{32} \sin(4x)$$

$$(g) \int \cos^5(x) = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{5} \sin(5x) + 5 \frac{1}{3} \sin(3x) + \binom{5}{2} \sin(x) \right) \\ = \frac{5}{8} \sin(x) + \frac{5}{48} \sin(3x) + \frac{1}{80} \sin(5x)$$

$$(h) \int \sin^5(x) = \frac{1}{16} \left(\frac{-1}{5} \cos(5x) + 5 \frac{1}{3} \cos(3x) - \binom{5}{2} \sin(x) \right) \\ = -\frac{5}{8} \cos(x) + \frac{5}{48} \cos(3x) - \frac{1}{80} \cos(5x)$$