

Exercice 1. (i) Soient $w, \xi > 0$, $f, \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions définies par

$$f(x) = x^2 e^{-w^2 x^2}$$

$$\varphi(x) = \frac{2w^2 + \xi^2 - 4w^4 x^2}{4w^4} e^{-w^2 x^2}.$$

Montrer (en utilisant les tables et les propriétés des transformées de Fourier) que

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{2w^2 - \alpha^2}{4\sqrt{2}w^5} e^{-\frac{\alpha^2}{4w^2}}$$

$$\hat{\varphi}(\alpha) = \frac{\xi^2 + \alpha^2}{4\sqrt{2}w^5} e^{-\frac{\alpha^2}{4w^2}}$$

(ii) Trouver $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ solution de

$$u(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} u''(t) e^{-\sqrt{2}|x-t|} dt = x^2 e^{-x^2}$$

Solution :

(i) On donne deux méthodes pour le calcul de \hat{f} :

Méthode 1 :

$$\begin{aligned} \hat{f}(\alpha) &= \mathcal{F} \left[x \cdot \left(x e^{-w^2 x^2} \right) \right] (\alpha) \\ \text{Prop. 5.7 (ii)} \quad &= i \frac{d}{d\alpha} \left[\mathcal{F} \left[x e^{-w^2 x^2} \right] (\alpha) \right] \\ \text{Table §15.5, 9)} \quad &= i \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{-i\alpha}{2\sqrt{2}w^3} e^{-\frac{\alpha^2}{4w^2}} \right] \\ &= i \left(\frac{-i}{2\sqrt{2}w^3} e^{-\frac{\alpha^2}{4w^2}} + \frac{-i\alpha}{2\sqrt{2}w^3} \left(-\frac{\alpha}{2w^2} \right) e^{-\frac{\alpha^2}{4w^2}} \right) \\ &= \frac{2w^2 - \alpha^2}{4\sqrt{2}w^5} e^{-\frac{\alpha^2}{4w^2}} \end{aligned}$$

Méthode 2 :

Remarquons que

$$\frac{d}{dx} \left[x e^{-w^2 x^2} \right] = e^{-w^2 x^2} - 2w^2 x^2 e^{-w^2 x^2} = e^{-w^2 x^2} - 2w^2 f(x)$$

et donc

$$f(x) = \frac{1}{2w^2} \left(e^{-w^2 x^2} - \frac{d}{dx} \left[x e^{-w^2 x^2} \right] \right).$$

On peut également arriver à ceci en utilisant une intégration par parties :

$$\int^x f(t) dt = \int^x t^2 e^{-w^2 t^2} dt \stackrel{\text{IPP}}{=} -\frac{x}{2w^2} e^{-w^2 x^2} + \int^x \frac{1}{2w^2} e^{-w^2 t^2} dt \quad \left| \begin{array}{ll} u = t & v = -\frac{1}{2w^2} e^{-w^2 t^2} \\ u' = 1 & v' = t e^{-w^2 t^2} \end{array} \right.$$

et donc

$$f(x) = \frac{d}{dx} \left[\int^x f(t) dt \right] = -\frac{1}{2w^2} \frac{d}{dx} \left[x e^{-w^2 x^2} \right] + \frac{1}{2w^2} e^{-w^2 x^2} = \frac{1}{2w^2} \left(e^{-w^2 x^2} - \frac{d}{dx} \left[x e^{-w^2 x^2} \right] \right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\alpha) &= \frac{1}{2w^2} \left(\mathcal{F} [e^{-w^2x^2}] (\alpha) - \mathcal{F} \left[\frac{d}{dx} [xe^{-w^2x^2}] \right] (\alpha) \right) \\
\text{Prop 5.7 (i)} \quad &= \frac{1}{2w^2} \left(\mathcal{F} [e^{-w^2x^2}] (\alpha) - (i\alpha) \mathcal{F} [xe^{-w^2x^2}] (\alpha) \right) \\
\text{Table §15.5, 8) \& 9)} \quad &= \frac{1}{2w^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}w} e^{-\frac{\alpha^2}{4w^2}} - (i\alpha) \frac{-i\alpha}{2\sqrt{2}w^3} e^{-\frac{\alpha^2}{4w^2}} \right) \\
&= \frac{2w^2 - \alpha^2}{4\sqrt{2}w^5} e^{-\frac{\alpha^2}{4w^2}}
\end{aligned}$$

Passons à $\hat{\varphi}$. On a

$$\varphi(x) = \frac{2w^2 + \xi^2}{4w^4} e^{-w^2x^2} - f(x),$$

d'où

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(\alpha) &= \frac{2w^2 + \xi^2}{4w^4} \mathcal{F} [e^{-w^2x^2}] - \hat{f}(\alpha) \\
\text{Table §15.5 8)} \quad &= \frac{2w^2 + \xi^2}{4\sqrt{2}w^5} e^{-\frac{\alpha^2}{4w^2}} - \frac{2w^2 - \alpha^2}{4\sqrt{2}w^5} e^{-\frac{\alpha^2}{4w^2}} \\
&= \frac{\xi^2 + \alpha^2}{4\sqrt{2}w^5} e^{-\frac{\alpha^2}{4w^2}},
\end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.

(ii) Soit $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|x|}$. Alors, la table § 15.5 7) donne

$$\hat{h}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2 + \alpha^2}$$

et l'équation s'écrit (choisir $w = 1$ pour f de (i))

$$u(x) + (u'' * h)(x) = f(x).$$

Ainsi, en appliquant la transformée de Fourier à cette équation et en utilisant les propositions 5.7 (i) (transformée de la dérivée) et 5.12 (transformée du produit de convolution) ainsi que (i),

$$\hat{u}(\alpha) + \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[u''](\alpha) \hat{h}(\alpha) = \hat{f}(\alpha)$$

$$\hat{u}(\alpha) + \sqrt{2\pi} (-\alpha^2) \hat{u}(\alpha) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2 + \alpha^2} = \frac{2 - \alpha^2}{4\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$$

$$\hat{u}(\alpha) \left(1 - \frac{2\alpha^2}{2 + \alpha^2} \right) = \frac{2 - \alpha^2}{4\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$$

$$\hat{u}(\alpha) \frac{2 - \alpha^2}{2 + \alpha^2} = \frac{2 - \alpha^2}{4\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$$

$$\hat{u}(\alpha) = \frac{2 + \alpha^2}{4\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$$

En utilisant (i) et choisissant $w = 1$ et $\xi = \sqrt{2}$, on déduit

$$u(x) = \varphi(x) = (1 - x^2) e^{-x^2}$$

Exercice 2.

Trouver $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique solution de

$$u''(x) - 2u(x + \pi) = 3 + \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

Indication : On pourra utiliser :

$$2 \sin(a) \sin(b) = \cos(a - b) - \cos(a + b)$$

$$\sin(n(x \pm \pi)) = (-1)^n \sin(nx)$$

$$\cos(n(x \pm \pi)) = (-1)^n \cos(nx)$$

Solution :

Remarquons que

$$\begin{aligned} 3 + \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) &= 3 + \frac{e^{i\frac{3}{2}x} - e^{-i\frac{3}{2}x}}{2i} \frac{e^{i\frac{1}{2}x} - e^{-i\frac{1}{2}x}}{2i} \\ &= 3 - \frac{1}{2} \frac{e^{i2x} - e^{ix} - e^{-ix} + e^{-i2x}}{2} \\ &= 3 + \frac{1}{2} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} - \frac{1}{2} \frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2} \\ &= 3 + \frac{1}{2} \cos(x) - \frac{1}{2} \cos(2x), \end{aligned}$$

qui est une série (somme finie) de Fourier ($a_0 = 6$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $b_1 = 0$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $b_2 = 0$ et $\forall n \geq 3$, $a_n = b_n = 0$.)

Cherchons u sous forme de série de Fourier, c'est-à-dire, on pose

$$u(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)\}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} u'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \{nB_n \cos(nx) - nA_n \sin(nx)\} \\ u''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \{-n^2 A_n \cos(nx) - n^2 B_n \sin(nx)\} \\ u(x + \pi) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{(-1)^n A_n \cos(nx) + (-1)^n B_n \sin(nx)\}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$u''(x) - 2u(x + \pi) = -A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n(-n^2 - 2(-1)^n) \cos(nx) + B_n(-n^2 - 2(-1)^n) \sin(nx)\}$$

En égalisant terme a terme cette série de Fourier et la série de Fourier du membre de droite de notre

équation originale, on obtient

$$\begin{array}{ll}
 n = 0 & - A_0 = 3 \\
 n = 1 & \begin{cases} (-1 + 2)A_1 = \frac{1}{2} \\ (-1 + 2)B_1 = 0 \end{cases} \\
 n = 2 & \begin{cases} (-4 - 2)A_2 = \frac{-1}{2} \\ (-4 - 2)B_2 = 0 \end{cases} \\
 n \geq 3 & \begin{cases} (-n^2 - 2(-1)^n)A_n = 0 \\ (-n^2 - 2(-1)^n)B_n = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

et on déduit donc $A_0 = -3$, $A_1 = \frac{1}{2}$, $B_1 = 0$, $A_2 = \frac{1}{12}$, $B_2 = 0$, $\forall n \geq 3$, $A_n = B_n = 0$ et donc notre solution est

$$u(x) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos(x) + \frac{1}{12} \cos(2x)$$

Exercice 3 (*Facultatif* : Valeurs propres et vecteurs propres de la dérivée seconde).

Déterminer les paramètres $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels il existe $u_\lambda \in C^2(\mathbb{R})$, 2π -périodique, non nulle telle que

$$u''(x) = \lambda u(x).$$

Solution :

Vu qu'on cherche u 2π -périodique, on la cherche sous forme de série de Fourier :

$$u(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)\}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
 u'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \{nB_n \cos(nx) - nA_n \sin(nx)\} \\
 u''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \{-n^2 A_n \cos(nx) - n^2 B_n \sin(nx)\}.
 \end{aligned}$$

et donc

$$0 = u''(x) - \lambda u(x) = -\lambda \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{(-n^2 - \lambda)A_n \cos(nx) + (-n^2 - \lambda)B_n \sin(nx)\}$$

En égalisant terme à terme la série de Fourier obtenue avec la série de Fourier de la fonction 0, on déduit

$$\begin{array}{ll}
 n = 0 & -\lambda \frac{A_0}{2} = 0 \\
 n \geq 1 & \begin{cases} (-n^2 - \lambda)A_n = 0 \\ (-n^2 - \lambda)B_n = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

Remarquons que si on a $\lambda \neq 0$ et $\forall n \geq 1$, $-n^2 - \lambda \neq 0$, la seule solution possible est $A_0 = A_n = B_n = 0$ et donc la seule solution possible est $u_\lambda(x) = 0$.

Par contre, si $\lambda = 0$, les solutions sont données par A_0 est un paramètre libre et $\forall n \geq 1$, $A_n = B_n = 0$, c'est-à-dire $u(x) = \frac{A_0}{2}$ est constante.

De plus, si $-n^2 - \lambda = 0$, i.e. $\lambda = -n^2$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, on a A_n et B_n des paramètres libres, $A_0 = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, n\}$, $A_k = B_k = 0$, c'est-à-dire $u_{-n^2}(x) = A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)$.

En conclusion, notre équation admet des solutions non-triviales si et seulement si $\lambda = -n^2$ et on a alors

$$u_{-n^2}(x) = \begin{cases} \frac{A_0}{2} & \text{si } n = 0 \\ A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx) & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

En d'autres termes, on peut voir que $\lambda = -n^2$ avec $n \in \mathbb{N}$ sont les valeurs propres de l'application linéaire

$$T : \begin{array}{ccc} \{u \in C^2(\mathbb{R}) : u \text{ } 2\pi\text{-périodique}\} & \rightarrow & \{u \in C^0(\mathbb{R}) : u \text{ } 2\pi\text{-périodique}\} \\ u & \mapsto & u'' \end{array}$$

de plus, l'espace propre associé à $\lambda = 0$ est de dimension 1 tandis que les espaces propres associés à $\lambda = -n^2$ sont de dimension 2.

Une façon de voir les séries de Fourier est qu'une série de Fourier consiste à écrire une fonction périodique dans la base donnée par les vecteurs propres de la dérivée seconde.

Un échantillon d'exercices QCM

Exercice 4.

Soit

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < \frac{\pi^2}{4}, |z| < \cos(\sqrt{x^2 + y^2}) \right\}.$$

Alors, le bord de Ω , $\partial\Omega$ a deux parties :

$$\Sigma_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < \frac{\pi^2}{4}, z = \cos(\sqrt{x^2 + y^2}) \right\},$$

paramétrée par

$$\alpha(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), \cos(r)), \quad r \in [0, \pi/2], \theta \in [0, 2\pi],$$

et

$$\Sigma_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < \frac{\pi^2}{4}, z = -\cos(\sqrt{x^2 + y^2}) \right\},$$

paramétrée par

$$\beta(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), -\cos(r)), \quad r \in [0, \pi/2], \theta \in [0, 2\pi],$$

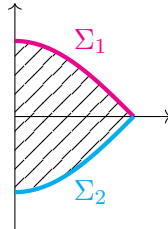
Considérons les normales associées $\alpha_r \wedge \alpha_\theta$ et $\beta_r \wedge \beta_\theta$. Alors :

- $\alpha_r \wedge \alpha_\theta$ et $\beta_r \wedge \beta_\theta$ sont toutes deux extérieures.
- $\alpha_r \wedge \alpha_\theta$ et $\beta_r \wedge \beta_\theta$ sont toutes deux intérieures.
- $\alpha_r \wedge \alpha_\theta$ est extérieure et $\beta_r \wedge \beta_\theta$ est intérieure.
- $\alpha_r \wedge \alpha_\theta$ est intérieure et $\beta_r \wedge \beta_\theta$ est extérieure.

Solution :

$\alpha_r \wedge \alpha_\theta$ est extérieure et $\beta_r \wedge \beta_\theta$ est intérieure.

Dessin dans le plan r, z :



La normale extérieur sur Σ_1 doit donc pointer vers le haut (troisième composante positive) et la normale extérieur sur Σ_2 doit donc pointer vers le bas (troisième composante négative.)

Or,

$$\alpha_r \wedge \alpha_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos \theta & \sin \theta & -\sin r \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \sin r \\ r \sin \theta \sin r \\ r \end{pmatrix}$$

est donc extérieure. De plus,

$$\beta_r \wedge \beta_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos \theta & \sin \theta & \sin r \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -r \cos \theta \sin r \\ -r \sin \theta \sin r \\ r \end{pmatrix}$$

est intérieure.

Exercice 5.

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x \leq -\frac{\pi}{2} \\ x^2 & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases} \quad \text{étendue par } 2\pi\text{-périodicité}$$

et $Ff(x)$, sa série de Fourier. Alors :

$\forall x \in]-\pi, \pi]$, $Ff(x) = x^2$.

$\forall x \in]-\pi, \pi]$,

$$Ff(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x \leq -\frac{\pi}{2} \\ x^2 & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$\forall x \in]-\pi, \pi]$,

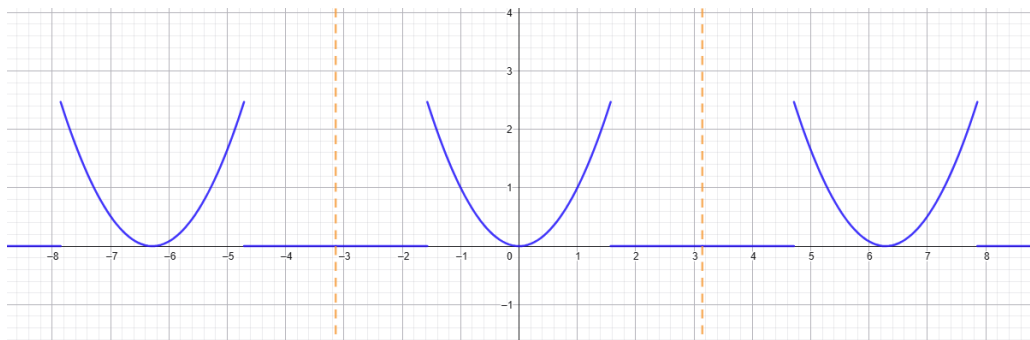
$$Ff(x) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{8} & \text{si } -\pi < x \leq -\frac{\pi}{2} \\ x^2 & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi^2}{8} & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$\forall x \in]-\pi, \pi]$,

$$Ff(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi^2}{8} & \text{si } x = -\frac{\pi}{2} \\ x^2 & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi^2}{8} & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

Solution :

En dessinant le graphe sur quelques périodes



On observe que f est continue sur $[-\pi, \pi]$ sauf en $\pm\frac{\pi}{2}$. Ainsi, par le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge vers f partout sur $[-\pi, \pi]$ sauf en $x = \pm\frac{\pi}{2}$ où elle converge vers la moyenne des limites à gauche et à droite.

$$Ff\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \frac{f\left(\pm\frac{\pi}{2} + 0\right) + f\left(\pm\frac{\pi}{2} - 0\right)}{2} = \frac{\frac{\pi^2}{4} + 0}{2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Ce qui nous amène à la réponse

$\forall x \in]-\pi, \pi]$,

$$Ff(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi^2}{8} & \text{si } x = -\frac{\pi}{2} \\ x^2 & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi^2}{8} & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$