Exercice 1 (ex 17.7 p. 271, corrigé p.279).
Trouver une fonction y définie par $y(x)$ telle que l'on ait, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y''(x) + 5y'(x-\pi) - y(x) = \cos x - 3\sin(2x) + 2 \quad \text{et } y(x+2\pi) = y(x)$$

Solution :
La condition $y(x+2\pi) = y(x)$ nous indique qu'on cherche une solution 2π-périodique et on la cherche donc sour la forme de série de Fourier :

$$\begin{aligned}
y(x) =& \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) \\
y'(x) =& \sum_{n=1}^{\infty} \left(nb_n \cos(nx) - aa_n \sin(nx)\right) \\
y''(x) =& \sum_{n=1}^{\infty} \left(-n^2 a_n \cos(nx) - na_n \sin(nx)\right) \\
y'(x-\pi) =& \sum_{n=1}^{\infty} \left(nb_n \cos(nx - n\pi) - na_n \sin(nx - n\pi)\right) \\
=& \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n nb_n \cos(nx) - (-1)^n na_n \sin(nx)\right)
\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}
y''(x)+&5y'(x-\pi) - y(x) \\
&= -\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(-a_n + 5(-1)^n nb_n - n^2 a_n\right)\cos(nx) + \left(-b_n - 5(-1)^n na_n - n^2 b_n\right)\sin(nx)\right)].
\end{aligned}$$

Or, le membre de droite de l'équation est donné sous forme de série (somme finie en fait) de Fourier, et en égalisant chaque terme, on obtient les systèmes :

$$\boxed{n=0} \quad -\frac{a_0}{2} = 2$$

$$\boxed{n=1} \quad \begin{cases} -a_1 - 5b_1 - a_1 = 1 \\ -b_1 + 5a_1 - b_1 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{n=2} \quad \begin{cases} -a_2 + 5\cdot 2b_2 4a_2 = 0 \\ -b_2 - 5\cdot 2a_2 - 4b_2 = -3 \end{cases}$$

$$\boxed{n \geq 3} \quad \begin{cases} -a_n + 5(-1)^n nb_n - n^2 a_n = 0 \\ -b_n - 5(-1)^n na_n - n^2 b_n = 0 \end{cases}$$

dont les solutions sont

$$\begin{aligned}
a_0 =& -2\\
a_1 =& \frac{-2}{29}\\
b_1 =& \frac{-5}{29}\\
a_2 =& \frac{6}{25}\\
b_2 =& \frac{3}{25}\\
a_n =& 0 \qquad \forall n \geq 3\\
b_n =& 0 \qquad \forall n \geq 3.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$y(x) = -2 - \frac{2}{29}\cos(x) - \frac{5}{29}\sin(x) + \frac{6}{25}\cos(2x) + \frac{3}{25}\sin(2x)$$

Exercice 2.
Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+4)^2} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t$$

Indication : La transformée de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = xe^{-\omega|x|}$ avec $\omega > 0$ est donnée par

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \frac{4\omega}{i\sqrt{2\pi}} \frac{\alpha}{(\alpha^2+\omega^2)^2}$$

Solution :
L'indication nous donne deux informations :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-w|x|}e^{-i\alpha x}dx = \frac{4w}{i\sqrt{2\pi}} \frac{\alpha}{(\alpha^2+w^2)^2} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4w}{i\sqrt{2\pi}} \frac{\alpha}{(\alpha^2+w^2)^2} e^{i\alpha x} d\alpha = xe^{-w|x|}.$$

La deuxième égalité ressemble plus à notre donnée avec $w = 2$. Il reste néanmoins 2 différences : $e^{i\alpha x}$ à la place de $\sin\left(\frac{t}{2}\right)$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}$ à la place de $\int_0^{\infty}$. On développe $e^{i\alpha x} = \cos(\alpha x) + i\sin(\alpha x)$ et on espère pouvoir transformer le domaine de l'intégrale par parité.
On a

$$\begin{aligned}
i\frac{\pi}{4}xe^{-2|x|} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(t^2+4)^2} e^{itx} dt\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(t^2+4)^2} \cos(tx)dt + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(t^2+4)^2} \sin(tx)dt
\end{aligned}$$

La première intégrale est nulle. Il y a deux façons de l'observer : On constate que le membre de gauche est imaginaire pur et la première intégrale est la partie réelle du membre de droite. Ou, on constate que l'intégrande de cette première intégrale est impaire.
Pour la deuxième intégrale, on a bien que l'intégrande est paire et donc

$$i\frac{\pi}{4}xe^{-2|x|} = i2\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+4)^2} \sin(tx)dt.$$

En choisissant pour finir $x = \frac{1}{2}$, on trouve le résultat final :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+4)^2} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = \frac{\pi}{16e}$$

Exercice 3 (Exemple 17.7 p. 269)**.**
Utiliser les proprietés de la transformée de Fourier (produit de convolution) pour trouver une solution $y(x)$ de l'équation intégrale

$$y(x) + 3\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} y(x-t)\,\mathrm{d}t = e^{-|x|} \quad \text{où} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Indication : La transformée de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^{-\omega|x|}}{\omega}$ avec $\omega > 0$ est donnée par

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \ .$$

Solution :
En utilisant la notation du produit de convolution, notre équation s'écrit

$$y + 3y * f = f$$

En prenant la transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} \hat{y} + 3\widehat{y * f} &= \hat{f} \\ \hat{y} + 3\sqrt{2\pi}\hat{y}\hat{f} &= \hat{f} \\ \hat{y}\left(1 + \sqrt{2\pi}\hat{f}\right) &= \hat{f} \end{aligned}$$

En utilisant l'indication avec $\omega = 1$, on trouve la transformée de Fourier de f,

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \frac{\hat{f}}{1 + 3\sqrt{2\pi}\hat{f}} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\alpha^2+1}}{1 + 3\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\alpha^2+1}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1 + \alpha^2 + 6} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\alpha^2 + 7} \end{aligned}$$

Ainsi, utilisant l'indication avec $\omega = \sqrt{7}$, on arrive à

$$y = \frac{1}{\sqrt{7}} e^{-\sqrt{7}|x|}$$

Exercice 4 (Ex 17.11 p. 272, corrigé p.279)**.**
Utiliser les proprietés de la transformée de Fourier (dérivée et produit de convolution) pour trouver une solution $y(x)$ de l'équation intégrale

$$3y(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[y''(t) - y(t)\right] f(x-t)\,\mathrm{d}t = g(x)$$

où $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-|x|}$ et $g(x) = xe^{-x^2}$.
Indication : Les transformées de Fourier des fonctions f et g sont respectivemnent données par

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\alpha^2 + 1} \quad \text{et} \quad \mathfrak{F}(g)(\alpha) = \frac{-i\alpha}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$$

Solution :

En écrivant l'équation avec le produit de convolution, on arrive à

$$3y + \left(y'' - y\right) * f = g$$

En prenant la transformée de Fourier, on arrive à

$$\begin{aligned}
3\hat{y} + \widehat{(y'' - y) * f} &= \hat{g} \\
3\hat{y} + \sqrt{2\pi}\widehat{(y'' - y)}\hat{f} &= \hat{g} \\
3\hat{y} + \sqrt{2\pi}\left((i\alpha)^2\hat{y} - \hat{y})\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\alpha^2+1} &= \hat{g} \\
3\hat{y} - 2(\alpha^2+1)\hat{y}\frac{1}{\alpha^2+1} &= \hat{g} \\
\hat{y} &= \hat{g}
\end{aligned}$$

et donc

$$y(x) = g(x) = xe^{-x^2}$$

Exercice 5 (ex 15.2 p. 239, corrigé p.240)**.**
On considère la fonction $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-x}\cos x$.

(i) Calculer la transformée de Fourier en cosinus de la fonction f étendue par parité sur $\mathbb{R}$.

(ii) Calculer la transformée de Fourier en sinus de la fonction f étendue par imparité sur $\mathbb{R}$.

Solution :

(i) On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_c[f](\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\cos(\alpha x)dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(x)\cos(\alpha x)dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\frac{e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x}}{2}dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(e^{i(1+\alpha)x}+e^{i(1-\alpha)x}+e^{-i(1-\alpha)x}+e^{-i(1+\alpha)x}\right)dx
\end{aligned}$$

Variante 1 : Rester en exponentielles

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_c[f](\alpha) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{x(-1+i(1+\alpha))}+e^{x(-1+i(1-\alpha))}+e^{x(-1-i(1-\alpha))}+e^{x(-1-i(1+\alpha))}dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\lim_{N\to\infty}\left[\frac{e^{x(-1+i(1+\alpha))}}{-1+i(1+\alpha)}+\frac{e^{x(-1+i(1-\alpha))}}{-1+i(1-\alpha)}+\frac{e^{x(-1-i(1-\alpha))}}{-1-i(1-\alpha)}+\frac{e^{x(-1-i(1+\alpha))}}{-1-i(1+\alpha)}\right]_0^N
\end{aligned}$$

En utlisant que $\lim_{x\to\infty} e^{-x+iy} = 0$, on arrive à

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_c[f](\alpha) =& \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{-1+i(1+\alpha)}-\frac{1}{-1+i(1-\alpha)}-\frac{1}{-1-i(1-\alpha)}-\frac{1}{-1-i(1+\alpha)}\right)\\
=& \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{-1-i(1+\alpha)-1+i(1+\alpha)}{(-1+i(1+\alpha))(-1-i(1+\alpha))}-\frac{-1-i(1-\alpha)-1+i(1-\alpha)}{(-1+i(1-\alpha))(-1-i(i-\alpha))}\right)\\
=& \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2}{1+(1+\alpha)^2}+\frac{2}{1+(1-\alpha)^2}\right)\\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{2+2\alpha+\alpha^2}+\frac{1}{2-2\alpha+\alpha^2}\right)\\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2-2\alpha+\alpha^2+2+2\alpha+\alpha^2}{(2+2\alpha+\alpha^2)(2-2\alpha+\alpha^2)}\\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{4+2\alpha^2}{(2+\alpha^2)^2-4\alpha^2}\\
=& \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2+\alpha^2}{4+\alpha^4}
\end{aligned}$$

Variante 2 : Repasser en fonctions trigonométriques et IPPs

$$\mathcal{F}_c[f](\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\left((1+\alpha)x\right)dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\left((1-\alpha)x\right)dx$$

Calculons donc

$$I(\mu) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(\mu x)dx.$$

On a

$$\begin{aligned}
I(\mu) =& \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(\mu x)dx && \left|\begin{array}{ll} u=-e^{-x} & v=\cos(\mu x)\\ u'=e^{-x} & v'=-\mu\sin(\mu x)\end{array}\right.\\
\overset{\text{IPP}}{=}& \left[-e^{-x}\cos(\mu x)\right]_0^{+\infty} - \mu\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(\mu x)dx\\
=& 1-\mu\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(\mu x)dx && \left|\begin{array}{ll} u=-e^{-x} & v=\sin(\mu x)\\ u'=e^{-x} & v'=\mu\cos(\mu x)dx\end{array}\right.\\
\overset{\text{IPP}}{=}& 1-\mu\left[-e^{-x}\sin(\mu x)\right]_0^{+\infty} - \mu^2\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(\mu x)dx\\
=& 1+\mu^2 I(\mu)\\
&\Rightarrow I(\mu) = \frac{1}{1+\mu^2}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_c[f](\alpha) =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(I(1+\alpha)+I(1-\alpha)\right)\\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1+(1+\alpha)^2}+\frac{1}{1+(1-\alpha)^2}\right)\\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{2+2\alpha+\alpha^2}+\frac{1}{2-2\alpha+\alpha^2}\right)\\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2-2\alpha+\alpha^2+2+2\alpha+\alpha^2}{(2+2\alpha+\alpha^2)(2-2\alpha+\alpha^2)}\\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{4+2\alpha^2}{(2+\alpha^2)^2-4\alpha^2}\\
=& \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2+\alpha^2}{4+\alpha^4}
\end{aligned}$$

(ii) On a

$$\begin{aligned}
F_s[f](\alpha) =& -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\sin(\alpha x)dx\\
=& -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(x)\sin(\alpha x)dx\\
=& -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\frac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{2i}dx\\
=& -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(e^{i(1+\alpha)x}-e^{i(1-\alpha)x}+e^{-i(1-\alpha)x}-e^{-i(1+\alpha)x}\right)dx
\end{aligned}$$

Variante 1 : Rester en exponentielles

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_s[f](\alpha) =& -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{x(-1+i(1+\alpha))}-e^{x(-1+i(1-\alpha))}+e^{x(-1-i(1-\alpha))}-e^{x(-1-i(1+\alpha))}dx\\
=& -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{x(-1+i(1+\alpha))}}{-1+i(1+\alpha)}-\frac{e^{x(-1+i(1-\alpha))}}{-1+i(1-\alpha)}+\frac{e^{x(-1-i(1-\alpha))}}{-1-i(1-\alpha)}-\frac{e^{x(-1-i(1+\alpha))}}{-1-i(1+\alpha)}\right]_0^{+\infty}\\
=& -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{-1+i(1+\alpha)}+\frac{1}{-1+i(1-\alpha)}-\frac{1}{-1-i(1-\alpha)}+\frac{1}{-1-i(1+\alpha)}\right)\\
=&\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{-1-i(1+\alpha)+1-i(1+\alpha)}{(-1+i(1+\alpha))(-1-i(1+\alpha))}+\frac{1+i(1-\alpha)-1+i(1-\alpha)}{(-1+i(1-\alpha))(-1-i(1-\alpha))}\right)\\
=&\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{-2i(1+\alpha)}{1+(1+\alpha)^2}+\frac{2i(1-\alpha)}{1+(1-\alpha)^2}\right)\\
=&\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{-(1+\alpha)}{2+2\alpha+\alpha^2}+\frac{1-\alpha}{2-2\alpha+\alpha^2}\right)\\
=&\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{-(1+\alpha)(2-2\alpha+\alpha^2)+(1-\alpha)(2+2\alpha+\alpha^2)}{(2+2\alpha+\alpha^2)(2-2\alpha+\alpha^2)}\\
=&\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{-2+2\alpha-\alpha^2-2\alpha+2\alpha^2-\alpha^3+2+2\alpha+\alpha^2-2\alpha-2\alpha^2-\alpha^3}{(2+\alpha^2)^2-4\alpha^2}\\
=&\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{-2\alpha^3}{4+\alpha^4}\\
=& -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha^3}{4+\alpha^4}
\end{aligned}$$

Variante 2 : Repasser en trigonométrique et IPPs

$$\mathcal{F}_s[f](\alpha) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin((1+\alpha)x)dx-\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin((1-\alpha)x)dx\right)$$

Calculons donc

$$J(\mu)=\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(\mu x)dx$$

On a

$$\begin{aligned}
J(\mu) =& \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(\mu x)dx \qquad \left|\begin{array}{ll} u=-e^{-x} & v=\sin(\mu x)\\ u'=e^{-x} & v'=\mu\cos(\mu x)\end{array}\right.\\
=& \left[-e^{-x}\sin(\mu x)\right]_0^{+\infty}+\mu\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(\mu x)dx\\
=&\mu I(\mu)=\frac{\mu}{1+\mu^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_s[f](\alpha) &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\left(J(1+\alpha) - J(1-\alpha)\right) \\
&= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1+\alpha}{1+(1+\alpha)^2} - \frac{1-\alpha}{1-(1+\alpha)^2}\right) \\
&= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\alpha+1}{2+2\alpha+\alpha^2} + \frac{\alpha-1}{2-2\alpha+\alpha^2}\right) \\
&= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{(\alpha+1)(2-2\alpha+\alpha^2)+(\alpha-1)(2+2\alpha+\alpha^2)}{(2-2\alpha+\alpha^2)(2+2\alpha+\alpha^2)} \\
&= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{2\alpha-2\alpha^2+\alpha^3+2-2\alpha+\alpha^2+2\alpha+2\alpha^2+\alpha^3-2-2\alpha-\alpha^2}{(2+\alpha^2)^2-4\alpha^2} \\
&= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha^3}{4+\alpha^4}
\end{aligned}
$$