Remarque.
Dans certains exercices, les formules suivantes peuvent être utiles

$$\boxed{\cos(nx \pm n\pi) = (-1)^n \cos(nx), \quad \sin(nx \pm n\pi) = (-1)^n \sin(nx)}$$

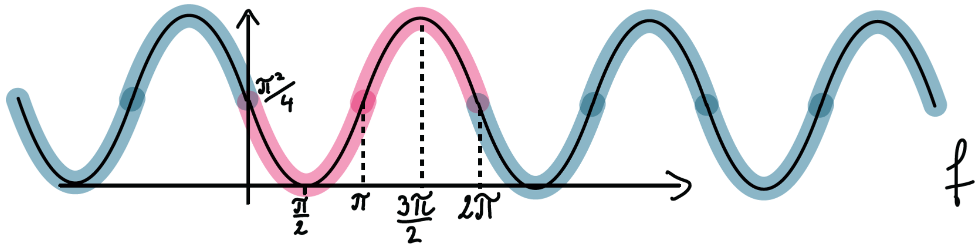
Exercice 1 (ex 17.10 p. 272, corrigé p. 282)**.**
Trouver une solution 2π-périodique $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = f(x)$$

où $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 & \text{si } 0 \le x < \pi, \\ \dfrac{\pi^2}{2} - \left(x - \frac{3\pi}{2}\right)^2 & \text{si } ; \pi \le x < 2\pi. \end{cases}$$

Solution :
Commençons par calculer la série de Fourier de f.



$$\begin{aligned} a_0 =& \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \\ =& \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 dx + \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} \frac{\pi^2}{2} - \left(x - \frac{3\pi}{2}\right)^2 dx \\ =& \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3\right]_{x=0}^{x=\pi} + \frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)^3\right]_{x=\pi}^{x=2\pi} \\ =& \frac{1}{3\pi}\left(\frac{\pi^3}{8} - \frac{-\pi^3}{8}\right) + \frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{3\pi}\left(\frac{\pi^3}{8} - \frac{-\pi^3}{8}\right) \\ =& \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

et pour $n \ge 1$,
Variante 1 : avec un petit changement de variables astucieux.

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\cos(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - \left(x-\frac{3\pi}{2}\right)^2\right)\cos(nx)dx \\ \overset{y=x-\pi}{=}& \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\cos(nx)dx + \frac{\pi}{2}\int_\pi^{2\pi}\cos(nx)dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2 \underbrace{\cos(ny-n\pi)}_{=(-1)^n\cos(ny)}dy \\ =& \frac{1-(-1)^n}{\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\cos(nx)dx}_{:=I_n} + \underbrace{\frac{\pi}{2}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{x=\pi}^{x=2\pi}}_{=0} \end{aligned}$$

Calculons I_n avec des IPPs

$$
\begin{aligned}
I_n &\overset{\text{IPP}}{=} \left[\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{1}{n}\sin(nx)\right]_{x=0}^{x=\pi} - \frac{2}{n}\int_0^\pi \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin(nx)dx & \left|\; \begin{array}{ll} u=\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 & v=\frac{1}{n}\sin(nx) \\ u'=2\left(x-\frac{\pi}{2}\right) & v'=\cos(nx) \end{array}\right. \\
&= -\frac{2}{n}\int_0^\pi \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin(nx)dx \\
&\overset{\text{IPP}}{=} -\frac{2}{n}\left[\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{-1}{n}\cos(nx)\right]_{x=0}^{x=\pi} - \frac{2}{n^2}\int_0^\pi \cos(nx)dx & \left|\; \begin{array}{ll} u=\left(x-\frac{\pi}{2}\right) & v=\frac{-1}{n}\cos(nx) \\ u'=1 & v'=\sin(nx) \end{array}\right. \\
&= \frac{\pi}{n^2}\underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} - \frac{-\pi}{n^2} - \frac{2}{n^2}\underbrace{\left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_{x=0}^{x=\pi}}_{=0} \\
&= \frac{\pi}{n^2}\left(1+(-1)^n\right)
\end{aligned}
$$

Pour finir,

$$
a_n = \frac{\left(1-(-1)^n\right)\left(1+(-1)^n\right)}{n^2} = \frac{1-(-1)^{2n}}{n^2} = 0
$$

Même astuce pour b_n :

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - \left(x-\frac{3\pi}{2}\right)^2\right)\sin(nx)dx \\
&\overset{y=x-\pi}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin(nx)dx + \frac{\pi}{2}\int_\pi^{2\pi}\sin(nx)dx - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2 \underbrace{\sin(ny-n\pi)}_{=(-1)^n\sin(ny)}dy \\
&= \frac{1-(-1)^n}{\pi}\underbrace{\int_0^\pi \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin(nx)dx}_{:=J_n} + \frac{\pi}{2}\left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_{x=\pi}^{x=2\pi} \\
&= \frac{1-(-1)^n}{\pi}J_n + \frac{\pi\left((-1)^n-1\right)}{2n} = \left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{1}{\pi}J_n - \frac{\pi}{2n}\right)
\end{aligned}
$$

On calcule enfin J_n avec des IPPs

$$
\begin{aligned}
J_n &= \int_0^\pi \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin(nx)dx \\
&\overset{\text{IPP}}{=} \left[\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{-1}{n}\cos(nx)\right]_{x=0}^{x=\pi} + \frac{2}{n}\int_0^\pi \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos(nx)dx & \left|\; \begin{array}{ll} u=\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 & v=\frac{-1}{n}\cos(nx) \\ u'=2\left(x-\frac{\pi}{2}\right) & v'=\sin(nx) \end{array}\right. \\
&= \frac{\pi^2}{4n}\left(1-(-1)^n\right) + \frac{2}{n}\int_0^\pi \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos(nx)dx \\
&\overset{\text{IPP}}{=} \frac{\pi^2}{4n}\left(1-(-1)^n\right) \\
&\quad + \frac{2}{n}\underbrace{\left[\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_{x=0}^{x=\pi}}_{=0} - \frac{2}{n^2}\int_0^\pi \sin(nx)dx & \left|\; \begin{array}{ll} u=\left(x-\frac{\pi}{2}\right) & v=\frac{1}{n}\sin(nx) \\ u'=1 & v'=\cos(nx) \end{array}\right. \\
&= \frac{\pi^2}{4n}\left(1-(-1)^n\right) + \frac{2}{n^3}\left[\cos(nx)\right]_{x=0}^{x=\pi} \\
&= \frac{\pi^2}{4n}\left(1-(-1)^n\right) + \frac{2\left((-1)^n-1\right)}{n^3} \\
&= \left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{\pi^2}{4n} - \frac{2}{n^3}\right)
\end{aligned}
$$

Pour finir,

$$\begin{aligned}
b_n &= (1-(-1)^n)\left((1-(-1)^n)\left(\frac{\pi}{4n}-\frac{2}{\pi n^3}\right)-\frac{\pi}{2n}\right)\\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair}\\ 2\left(2\left(\frac{\pi}{4(2k-1)}-\frac{2}{\pi(2k-1)^3}\right)-\frac{\pi}{2(2k-1)}\right) & \text{si } n=2k-1 \text{ avec } k\in\mathbb{N}^*\end{cases}\\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair}\\ \frac{-8}{\pi(2k-1)^3} & \text{si } n=2k-1 \text{ avec } k\in\mathbb{N}^*\end{cases}
\end{aligned}$$

Variante 2 : Brute force.
On commence par calculer quelques primitives. Pour $\alpha \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\int^x t\cos(\alpha t)dt &\overset{\text{IPP}}{=} \frac{1}{\alpha}x\sin(\alpha x)-\frac{1}{\alpha}\int^x \sin(\alpha t)dt && \left|\begin{array}{ll} u=t & v=\frac{1}{\alpha}\sin\alpha t\\ u'=1 & v'=\cos\alpha t\end{array}\right.\\
&= \frac{1}{\alpha}x\sin(\alpha x)+\frac{1}{\alpha^2}\cos(\alpha x)\\
\int^x t\sin(\alpha t)dt &\overset{\text{IPP}}{=} -\frac{1}{\alpha}x\cos(\alpha x)+\frac{1}{\alpha}\int^x \cos(\alpha t)dt && \left|\begin{array}{ll} u=t & v=-\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha t)\\ u'=1 & v'=\sin(\alpha t)\end{array}\right.\\
&= -\frac{1}{\alpha}x\cos(\alpha x)+\frac{1}{\alpha^2}\sin(\alpha x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int^x t^2\cos(\alpha t)dt &\overset{\text{IPP}}{=} \frac{1}{\alpha}x^2\sin(\alpha x)-\frac{2}{\alpha}\int^x t\sin(\alpha t)dt && \left|\begin{array}{ll} u=t^2 & v=\frac{1}{\alpha}\sin(\alpha t)\\ u'=2t & v'=\cos(\alpha t)\end{array}\right.\\
&= \frac{x^2}{\alpha}\sin(\alpha x)+\frac{2x}{\alpha^2}\cos(\alpha x)-\frac{2}{\alpha^3}\sin(\alpha x)\\
\int^x t^2\sin(\alpha x)dt &\overset{\text{IPP}}{=} -\frac{1}{\alpha}x^2\cos(\alpha t)+\frac{2}{\alpha}\int^x t\cos(\alpha t)dt && \left|\begin{array}{ll} u?t^2 & v=-\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha t)\\ u'=2t & v'=\sin(\alpha t)\end{array}\right.\\
&= -\frac{x^2}{\alpha}\cos(\alpha x)+\frac{2x}{\alpha^2}\sin(\alpha x)+\frac{2}{\alpha^3}\cos(\alpha x)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\cos(nx)dx &= \int_0^\pi x^2\cos(nx)-\pi\int_0^\pi x\cos(nx)dx+\frac{\pi^2}{4}\int_0^\pi \cos(nx)dx\\
&= \left[\frac{x^2}{n}\sin(nx)+\frac{2x}{n^2}\cos(nx)-\frac{2}{n^3}\sin(nx)\right]_{x=0}^{x=\pi}\\
&\quad -\pi\left[\frac{1}{n}x\sin(nx)+\frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_{x=0}^{x=\pi}\\
&\quad +\frac{\pi^2}{4}\left[\frac{1}{n^2}\sin(nx)\right]_{x=0}^{x=\pi}\\
&= \frac{2\pi}{n^2}\cos(n\pi)-\pi\frac{1}{n^2}\left(\cos(n\pi)-1\right)\\
&= \frac{2\pi}{n^2}(-1)^n-\frac{\pi}{n^2}(-1)^n+\frac{\pi}{n^2}\\
&= \frac{\pi}{n^2}\left((-1)^n+1\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_\pi^{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}-\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)^2\right)\cos(nx)dx &= -\int_\pi^{2\pi} x^2\cos(nx) + 3\pi\int_\pi^{2\pi} x\cos(nx)dx - \frac{7\pi^2}{4}\int_\pi^{2\pi}\cos(nx)dx \\
&= -\left[\frac{x^2}{n}\sin(nx)+\frac{2x}{n^2}\cos(nx)-\frac{2}{n^3}\sin(nx)\right]_{x=\pi}^{x=2\pi} \\
&\quad + 3\pi\left[\frac{1}{n}x\sin(nx)+\frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_{x=\pi}^{x=2\pi} \\
&\quad - \frac{7\pi^2}{4}\left[\frac{1}{n^2}\sin(nx)\right]_{x=\pi}^{2\pi} \\
&= -\frac{2\pi}{n^2}\left(2-\cos(n\pi)\right)+\frac{3\pi}{n^2}\left(1-\cos(n\pi)\right) \\
&= -\frac{\pi}{n^2}-\frac{\pi}{n^2}(-1)^n \\
&= -\frac{\pi}{n^2}\left(1+(-1)^n\right)
\end{aligned}$$

Et donc,

$$\begin{aligned}
a_n =& \frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\cos(nx)dx+\frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}-\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)^2\right)\cos(nx)dx \\
=& \frac{1}{n^2}\left(1+(-1)^n\right)-\frac{1}{n^2}\left(1+(-1)^n\right)=0
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\sin(nx)dx &= \int_0^\pi x^2\sin(nx)-\pi\int_0^\pi x\sin(nx)dx+\frac{\pi^2}{4}\int_0^\pi\sin(nx)dx \\
&= \left[-\frac{x^2}{n}\cos(nx)+\frac{2x}{n^2}\sin(nx)+\frac{2}{n^3}\cos(nx)\right]_{x=0}^{x=\pi} \\
&\quad -\pi\left[-\frac{1}{n}x\cos(nx)+\frac{1}{n^2}\sin(nx)\right]_{x=0}^{x=\pi} \\
&\quad +\frac{\pi^2}{4}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_{x=0}^{x=\pi} \\
&= -\frac{\pi^2}{n}\cos(n\pi)+\frac{2}{n^3}\left(\cos(n\pi)-1\right)+\frac{\pi^2}{n}\cos(n\pi)-\frac{\pi^2}{4n}\left(\cos(n\pi)-1\right) \\
&= \frac{2}{n^3}\left((-1)^n-1\right)+\frac{\pi^2}{4n}\left(1-(-1)^n\right)
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
\int_{\pi}^{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}-\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)^2\right)\sin(nx)dx =& -\int_{\pi}^{2\pi}x^2\sin(nx)+3\pi\int_{\pi}^{2\pi}x\sin(nx)dx-\frac{7\pi^2}{4}\int_{\pi}^{2\pi}\sin(nx)dx \\
=& -\left[-\frac{x^2}{n}\cos(nx)+\frac{2x}{n^2}\sin(nx)+\frac{2}{n^3}\cos(nx)\right]_{x=\pi}^{x=2\pi} \\
& +3\pi\left[-\frac{1}{n}x\cos(nx)+\frac{1}{n^2}\sin(nx)\right]_{x=\pi}^{x=2\pi} \\
& -\frac{7\pi^2}{4}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_{x=\pi}^{x=2\pi} \\
=& \frac{\pi^2}{n}\left(4-\cos(n\pi)\right)-\frac{2}{n^3}\left(1-\cos(n\pi)\right)-\frac{3\pi^2}{n}\left(2-\cos(n\pi)\right) \\
& +\frac{7\pi^2}{4n}\left(1-\cos(n\pi)\right) \\
=& \frac{\pi^2}{n}\left(\frac{7}{4}+4-6\right)+\frac{\pi^2}{n}(-1)^n\left(-1+3-\frac{7}{4}\right)+\frac{2}{n^3}\left((-1)^n-1\right) \\
=& \frac{\pi^2}{4n}\left((-1)^n-1\right)+\frac{2}{n^3}\left((-1)^n-1\right)
\end{aligned}
$$

Et donc,

$$
\begin{aligned}
b_n =& \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\sin(nx)dx+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}-\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)^2\right)\sin(nx)dx \\
=& \frac{4}{\pi n^3}\left((-1)^n-1\right) \\
=& \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{-8}{\pi(2k-1)^3} & \text{si } n=2k-1 \text{ avec } k\in\mathbb{N}* \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Maintenant qu'on connait les coefficients de Fourier de f, on peut chercher une solution de l'équation différentielle sous la forme d'une série de Fourier :

$$
\begin{aligned}
y(x) =& \frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos(nx)+B_n\sin(nx)\right) \\
y'(x) =& \sum_{n=1}^{\infty}\left(nB_n\cos(nx)-nA_n\sin(nx)\right) \\
y'(x)+y(x) =& \frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(A_n+nB_n)\cos(nx)+(B_n-nA_n)\sin(nx)\right\} \\
=& f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)
\end{aligned}
$$

On arrive donc à la famille de systèmes

$$
\boxed{n=0}\quad A_0=a_0=\frac{\pi^2}{2}
$$

$$
\boxed{n\geq 1}\quad \left\{\begin{array}{l} A_n+nB_n=a_n=0 \\ B_n-nA_n=b_n \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} A_n=\dfrac{-n}{n^2+1}b_n \\ \\ B_n=\dfrac{1}{n^2+1}b_n \end{array}\right.
$$

et donc

$$A_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{8}{\pi(2k-1)^2((2k-1)^2+1)} & \text{si } n = 2k-1 \text{ avec } k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$$B_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{-8}{\pi(2k-1)^3((2k-1)^2+1)} & \text{si } n = 2k-1 \text{ avec } k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Pour finir,

$$y(x) = \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{8\cos((2k-1)x)}{\pi(2k-1)^2\left((2k-1)^2+1\right)} - \frac{8\sin((2k-1)x)}{\pi(2k-1)^3\left((2k-1)^2+1\right)} \right)$$

Remarque (Retour à l'analyse II HORS CADRE COURS)**.**
L'équation donnée est une équation différentielle linéaire du premier à coefficients constants. En analyse II, on a vu qu'en utilisant par exemple la méthode du facteur intégrant, il est possible de trouver la solution générale de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&y'(x) + y(x) = f(x) \\
&y'(x)e^x + y(x)e^x = f(x)e^x \\
&\frac{d}{dx}\left[y(x)e^x\right] = f(x)e^x \\
&y(x)e^x = \int_0^x f(t)e^t dt + C \\
&y(x) = e^{-x}\int_0^x f(t)e^t dt + Ce^{-x}
\end{aligned}$$

Pour répondre à la question de l'exercice, il faut donc déterminer si il existe une constante C telle que y donné ainsi est 2π périodique, sachant que f l'est.
Or, ceci est possible !
On a

$$\begin{aligned}
y(x+2\pi) =& e^{-x-2\pi}\int_0^{x+2\pi} f(t)e^t dt + Ce^{-x-2\pi} \\
=& e^{-x-2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(t)e^t dt + \int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t)e^t dt\right) + Ce^{-x-2\pi} \\
\overset{t=s+2\pi}{=}& e^{-x-2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(t)e^t dt + \int_0^{x} f(s+2\pi)e^{s+2\pi} ds\right) + Ce^{-x-2\pi} \\
=& e^{-x-2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(t)e^t dt + e^{2\pi}\int_0^{x} f(s)e^{s} ds\right) + Ce^{-x-2\pi} \\
=& e^{-x}\int_0^x f(s)e^s ds + Ce^{-x} \\
& - Ce^{-x} + e^{-x-2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^t dt + Ce^{-x-2\pi} \\
=& y(x) + e^{-x}\left(C\left(e^{-2\pi}-1\right) + e^{-2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^t dt\right)
\end{aligned}$$

Choisissant donc

$$C = \frac{-e^{-2\pi}}{e^{-2\pi}-1}\int_0^{2\pi} f(t)e^t dt = \frac{1}{e^{2\pi}-1}\int_0^{2\pi} f(t)e^t dt$$

qui est indépendant de x, on obtient ainsi que y est périodique.

Remarquons de plus que le travail qu'on fait avec Fourier est l'équivalent de la méthode des coefficients indéterminés [1] avec un paramètre n qui se balade.

Exercice 2 (Exemple 17.6 p. 268)**.**
Trouver une solution 2π-périodique $y(x)$ de l'équation

$$y(x) + 2y(x-\pi) = \cos x + 3\sin(2x) + 4\cos(5x) \qquad \text{pour} \qquad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Indication : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a les formules trigonométriques

$$\cos(nt - n\pi) = (-1)^n \cos(nt), \quad \sin(nt - n\pi) = (-1)^n \sin(nt).$$

Solution :
On cherche une solution de la forme

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

On a alors

$$\begin{aligned} y(x-\pi) =& \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx - n\pi) + b_n \sin(nx - n\pi)) \\ =& \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(-1)^n \cos(nx) + b_n(-1)^n \sin(nx)) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} y(x) + 2y(x-\pi) =& \frac{3}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{(1+2(-1)^n)\, a_n \cos(nx) + (1+2(-1)^n)\, b_n \sin(nx)\} \\ =& \cos(x) + 3\sin(2x) + 4\cos(5x) \end{aligned}$$

De plus, si A_n et B_n sont les coefficients de Fourier de $\cos(x) + 3\sin(2x) + 4\cos(5x)$, on a $A_1 = 1$, $A_5 = 4$ et $B_2 = 3$ et tous les autres coefficients sont nuls.
Ainsi, on arrive aux systèmes

$$\boxed{n=0} \qquad \frac{3}{2}a_0 = 0$$

$$\boxed{n=1} \qquad \begin{cases} -1a_1 = 1 \\ -1b_1 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{n=2} \qquad \begin{cases} 3a_2 = 0 \\ 3b_2 = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{n=5} \qquad \begin{cases} -1a_5 = 4 \\ -1b_5 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2,5\}} \qquad \begin{cases} (1+(-1)^n)a_n = 0 \\ (1+(-1)^n)b_n = 0 \end{cases}$$

Ainsi, on arrive à

$$y(x) = -\cos(x) + \sin(2x) - 4\cos(5x)$$

Exercice 3 (ex 17.8 p. 271, corrigé p. 280)**.**

1. Aussi appelé des fois la méthode de je devine à quoi ressemble la solution. Voir `https://sma.epfl.ch/~struett/analyse2/main_proofs_at_the_end.pdf#theorem.1.26`

(i) Calculer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique et paire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

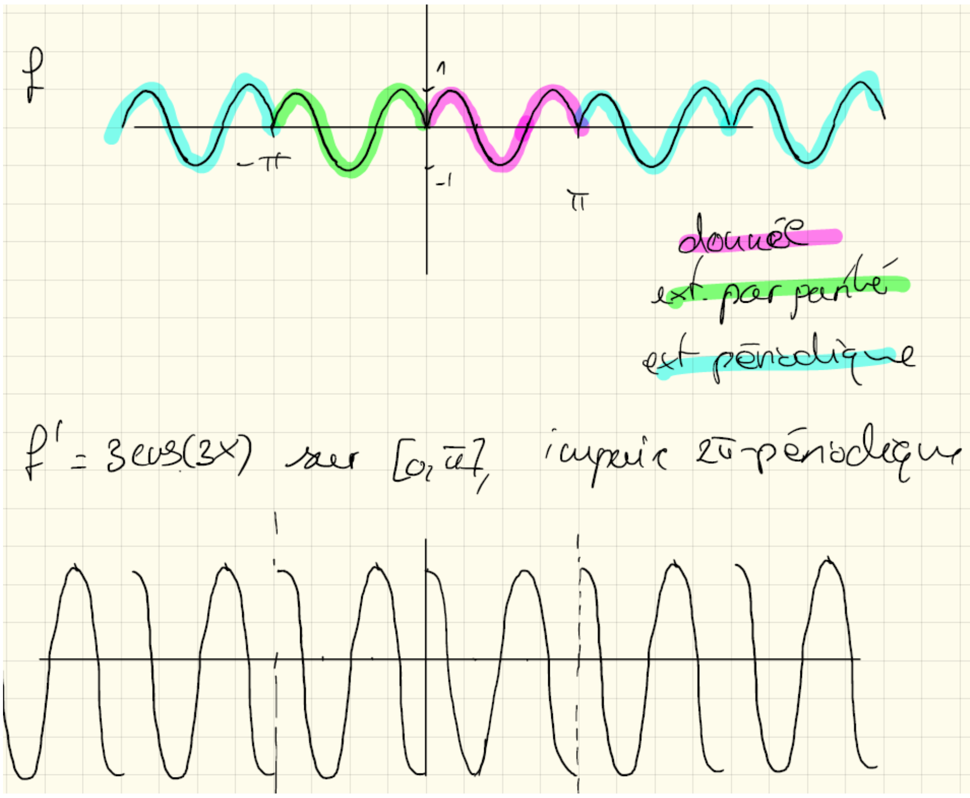
$$f(x) = \sin(3x) \quad \text{si} \quad x \in [0, \pi].$$

(ii) Trouver une fonction y définie par $y(x)$, 2π-périodique et paire qui vérifie l'équation

$$y(x) - 2y(x - \pi) = \sin(3x) \quad \text{pour} \quad x \in [0, \pi].$$

Solution :

(i)



Vu que f est paire, on a $b_n = 0$ pour tout n,

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{3} \cos(3x) \right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3\pi}$$

et pour $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(3x) \cos(nx)dx$$

En utilisant les formules d'Euler, on trouve

$$\begin{aligned}
\sin(3x)\cos(nx) =& \frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i} \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \\
=& \frac{e^{i(n+3)x} + e^{-i(n-3)x} - e^{i(n-3)x} - e^{-i(n+3)x}}{4i} \\
=& \frac{1}{2} \left(\sin((n+3)x) - \sin((n-3)x) \right).
\end{aligned}$$

Ainsi, si $n = 3$,

$$\begin{aligned} a_3 =& \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(6x)dx \\ =& \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{6}\cos(6x)\right]_{x=0}^{x=\pi} \\ =& \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right) = 0 \end{aligned}$$

et pour $n \neq 3$,

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n+3}\cos((n+3)x) + \frac{1}{n-3}\cos((n-3)x)\right]_{x=0}^{x=\pi} \\ =& \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n+3}(-1)^{n+3} + \frac{1}{n-3}(-1)^{n-3} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n-3}\right) \\ =& \frac{1}{\pi}\left(\frac{1+(-1)^n}{n+3} - \frac{1+(-1)^n}{n-3}\right) \\ =& \frac{1+(-1)^n}{\pi}\frac{n-3-n-3}{n^2-9} \\ =& -\frac{6}{\pi}\frac{1+(-1)^n}{n^2-9} = \begin{cases} -\dfrac{12}{\pi(4k^2-9)} & \text{si } n = 2k,\ k \geq 1 \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Pour finir, la série de Fourier de f est

$$Ff(x) = \frac{2}{3\pi} - \frac{12}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{4k^2-9}$$

(ii) Vu qu'on cherche une solution paire, on la cherche de la forme

$$y(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx)$$

On a

$$\begin{aligned} y(x-\pi) =& \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx - n\pi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_n \cos(nx) \\ y(x) - 2y(x-\pi) =& -\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(1 - 2(-1)^n\right)\cos(nx) \end{aligned}$$

Ainsi, les coefficients A_n doivent être solution de

$$\begin{aligned} \boxed{n=0} \quad & -\frac{A_0}{2} = -\frac{2}{3\pi} \\ \boxed{n=2k} \quad & -A_n = -\frac{12}{\pi(4k^2-9)} \\ \boxed{n=2k+1} \quad & 3A_n = 0 \end{aligned}$$

Et pour finir,

$$y(x) = \frac{-2}{3\pi} + \frac{12}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{4k^2-9}$$

Exercice 4 (ex 15.1 p. 239, corrigé p. 15.1)**.**
Calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Rappel : Si $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, pour montrer que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = l$, on peut soit montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{Re}\,(f(x)) = \mathrm{Re}\,(l) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\infty} \mathrm{Im}\,(g(x)) = \mathrm{Im}\,(l),$$

ou montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} |g(x) - l| = 0,$$

où, $|\cdot|$ dénote le module complexe.
Solution :
On a

$$\begin{aligned}\hat{f}(\alpha) =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\alpha x}dx \\ =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-x}e^{-i\alpha x}dx \\ =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{N\to\infty} \int_{0}^{N} e^{-(1+i\alpha)x}dx \\ =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{N\to\infty} \left[\frac{-1}{1+i\alpha} e^{-(1+i\alpha)x}\right]_{x=0}^{x=N} \\ =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1+i\alpha} - \frac{1}{1+i\alpha} \lim_{N\to\infty} e^{-(1+i\alpha)N}\right)\end{aligned}$$

Or

$$\lim_{N\to\infty} \left|e^{-(1+i\alpha)N}\right| = \lim_{N\to\infty} e^{\mathrm{Re}(-(1+i\alpha)N)} = \lim_{N\to\infty} e^{-N} = 0,$$

d'où $\lim_{N\to\infty} e^{-(1+i\alpha)N} = 0$.
Ou, alternativement,

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \mathrm{Re}\left(e^{-(1+i\alpha)N}\right) &= \lim_{N\to\infty} e^{-N}\cos(\alpha N) = 0 \\ \lim_{N\to\infty} \mathrm{Im}\left(e^{-(1+i\alpha)N}\right) &= \lim_{N\to\infty} e^{-N}\sin(\alpha N) = 0\end{aligned}$$

Enfin,

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+i\alpha}$$

Exercice 5.
Dessiner le graphe des fonctions suivantes et trouver leur transformée de Fourier :

(i) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$

(ii) $g(x) = \begin{cases} \pi + \frac{\pi}{2}x, & \text{si } -2 \leq x \leq 0, \\ \pi - \frac{\pi}{2}x, & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$

Quel est le lien entre les fonctions f et g ?
Solution :

(i) La fonction f est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. Sa transformée de Fourier vaut

$$\begin{aligned}\hat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-i\alpha x} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{-i\alpha} e^{-i\alpha x} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2i\alpha} \left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} \right) = \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}.\end{aligned}$$

(ii) La fonction g est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Sa transformée de Fourier vaut

$$\begin{aligned}\hat{g}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i\alpha x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^{0} (\pi + \frac{\pi}{2} x) e^{-i\alpha x} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{2} (\pi - \frac{\pi}{2} x) e^{-i\alpha x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{-i\alpha} e^{-i\alpha x} (\pi + \frac{\pi}{2} x) \right]_{-2}^{0} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^{0} \frac{\pi}{-2i\alpha} e^{-i\alpha x} dx \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{-i\alpha} e^{-i\alpha x} (\pi - \frac{\pi}{2} x) \right]_{0}^{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{2} \frac{\pi}{2i\alpha} e^{-i\alpha x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi}{2} \left(\left[\frac{e^{-i\alpha x}}{-\alpha^2} \right]_{0}^{2} - \left[\frac{e^{-i\alpha x}}{-\alpha^2} \right]_{-2}^{0} \right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \left(\frac{e^{2i\alpha} + e^{-2i\alpha}}{2} \frac{2}{-\alpha^2} - \frac{2}{-\alpha^2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{-\alpha^2 \sqrt{2}} (\cos(2\alpha) - 1) = \sqrt{2\pi} \frac{\sin^2(\alpha)}{\alpha^2}.\end{aligned}$$

Nous pouvons observer que $\hat{g}(\alpha) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\alpha)^2$. Ainsi $g = f * f$.