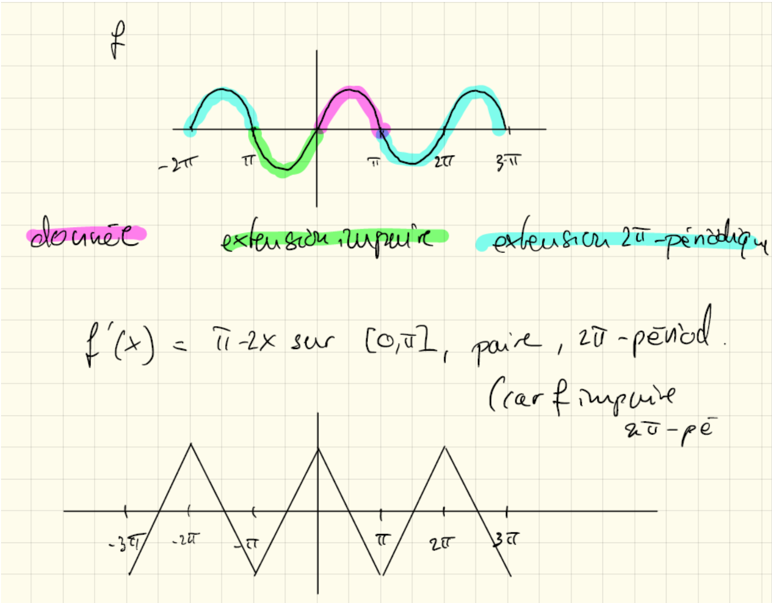
EPFL – Automne 2025 | D. Strütt
Analyse III – CGC GC SIE | **Corrigé**
Série 11 | 20 novembre 2025

Exercice 1 (ex 14.5 p. 220, corrigé p. 225). (i) Calculer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique et impaire qui coïncide avec $x(\pi - x)$ sur $[0, \pi]$.

(ii) En utilisant la question (i) et l'identité de Parseval, déduire la somme de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^6}.$$

Solution :



(i) Vu que f est impaire, $a_n = 0$ pour tout n. De plus,

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(nx)dx && \Big|\ f \text{ impaire implique } f(x)\sin(nx) \text{ paire} \\
&\overset{\text{IPP}}{=} -\frac{2}{\pi n}\left[x(\pi - x)\cos(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}(\pi - 2x)\cos(nx)dx && \Big|\ u = x(\pi - x) \quad v = -\tfrac{1}{n}\cos(nx),\ u' = \pi - 2x \quad v' = \sin(nx) \\
&\overset{\text{IPP}}{=} \frac{2}{\pi n^2}\left[(\pi - 2x)\sin(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx && \Big|\ u = \pi - 2x \quad v = \tfrac{1}{n}\sin(nx),\ u' = -2 \quad v' = \cos(nx) \\
&= \frac{4}{\pi n^3}\left[-\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi n^3}\left(-\cos(n\pi) + 1\right) \\
&= \frac{4}{\pi n^3}\left((-1)^{n+1} + 1\right) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{8}{\pi(2k-1)^3} & \text{si } n = 2k-1 \text{ impair} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$Ff(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3}\sin((2k-1)x)$$

(*ii*) Au graphe, on voit que f est C^1 par morceaux, on a donc par Parseval,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^2}\frac{1}{(2k-1)^6}$$

De plus, vu que f^2 est paire,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^4 - 2\pi x^3 + \pi^2 x^2 dx = \frac{\pi^4}{15}$$

On conclut donc

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

Exercice 2 (ex 14.6 p. 220, corrigé p. 226)**.**
A l'aide de l'identité de Parseval, montrer que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 x \; dx = \frac{3}{4}\pi.$$

Remarque : Le but de cet exercice n'est pas de calculer une primitive de $\cos^4(x)$ (qu'on sait faire avec les formules d'Euler) mais plutôt de calculer une série de Fourier à l'aide des formules d'Euler.
Solution :
Avant de commencer ce corriger, on remarque que dans l'exercice 7 de la série 1, pour calculer les primitives des fonctions de la forme $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$, on a commencé par calculer leur série (dans leur cas somme finie) de Fourier.
On fait ceci ici avec $f(x) = \cos^2(x)$ de telle sorte que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4(x)dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(x)dx.$$

$$\cos^2(x) = \frac{e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x),$$

et on a donc que les coefficients de Fourier de $f(x) = \cos^2(x)$ sont $a_0 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$ et tous les autres coefficients sont nuls. Ainsi, l'identité de Parseval nous dit

$$\begin{aligned}
\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)^2 dx &= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \\
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4(x)dx &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\
&\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \cos^4(x)dx = \frac{3}{4}\pi,
\end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.

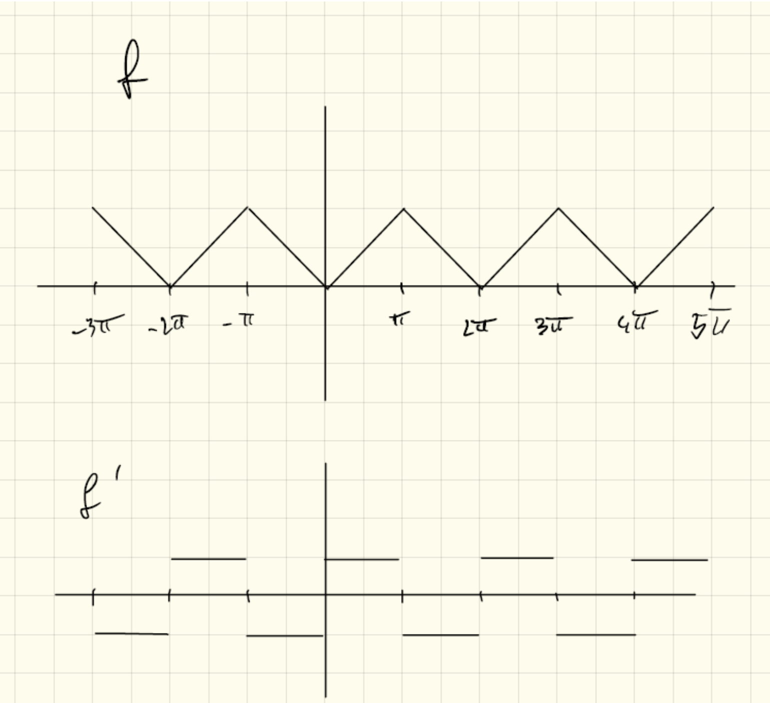
Exercice 3 (ex 14.7 p. 220, corrigé p. 226)**.** (*i*) Calculer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = |x| \quad \text{si} \quad x \in [-\pi, \pi[.$$

(*ii*) En déduire les sommes des séries

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\ .$$

Solution :



(i) Vu que f est paire, on a $b_n = 0$ pour tout n. Et,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \pi$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx \\
&\overset{\text{IPP}}{=} \frac{2}{\pi n}\left[x\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx \\
&= \frac{2}{\pi n^2}\left[\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{4}{\pi(2k+1)^2} & \text{si } n = 2k+1 \text{ impair} \end{cases}
\end{aligned}
\qquad
\left|\begin{array}{ll} u = x & v = \frac{1}{n}\sin(nx) \\ u' = 1 & v' = \cos(nx) \end{array}\right.$$

Ainsi,

$$Ff(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k+1)^2}\cos((2k+1)x)$$

(ii) Remarquons que les coefficients de Fourier se comportent comme $\frac{1}{k^2}$ tandis que les séries à calculer se comportent comme $\frac{1}{k^4}$. Vu que l'exposant dans la série à calculer est le double de celui des coefficients de Fourier, on utilise Parseval.

Au graphe, on voit que f est C^1 par morceaux et donc,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{16}{\pi^2}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}.$$

D'un autre côté, on a

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Donc,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^2}{16}\left(\frac{2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi^4}{96}$$

De plus,

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{1}{16} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} + \frac{\pi^4}{96} = \frac{1}{16} S + \frac{\pi^4}{96}.$$

Ce qui nous mène à

$$S = \frac{16}{15} \frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}$$

Exercice 4.
Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x$.

(i) Calculer $F_c f$ et $F_s f$, les séries de Fourier en cosinus et en sinus de la fonction f.

(ii) Comparer les valeurs de $F_c f$, $F_s f$, et f sur $[0, \pi]$.

(iii) En déduire la valeur des deux sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Solution :

(i) Pour la série en cosinus, on a

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi \\
a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx \\
&\overset{\text{IPP}}{=} \frac{2}{\pi n} \left[x \sin(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx && \left| \begin{array}{ll} u = x & v = \frac{1}{n} \sin(nx) \\ u' = 1 & v' = \cos(nx) \end{array} \right. \\
&= \frac{2}{\pi n^2} \left[\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2} \left((-1)^n - 1\right) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{4}{\pi (2k+1)^2} & \text{si } n = 2k+1 \text{ impair.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Et donc,

$$F_c f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi (2k+1)^2} \cos((2k+1)x)$$

Tandis que pour la série en sinus, on a

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) \\
&\overset{\text{IPP}}{=} - \frac{2}{\pi n} \left[x \cos(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx && \left| \begin{array}{ll} u = x & v = -\frac{1}{n} \cos(nx) \\ u' = 1 & v' = \sin(nx) \end{array} \right. \\
&= - \frac{2}{n} (-1)^n + \frac{2}{\pi n^2} \left[\sin(nx)\right]_0^{\pi} \\
&= - \frac{2(-1)^n}{n}.
\end{aligned}$$

Et donc

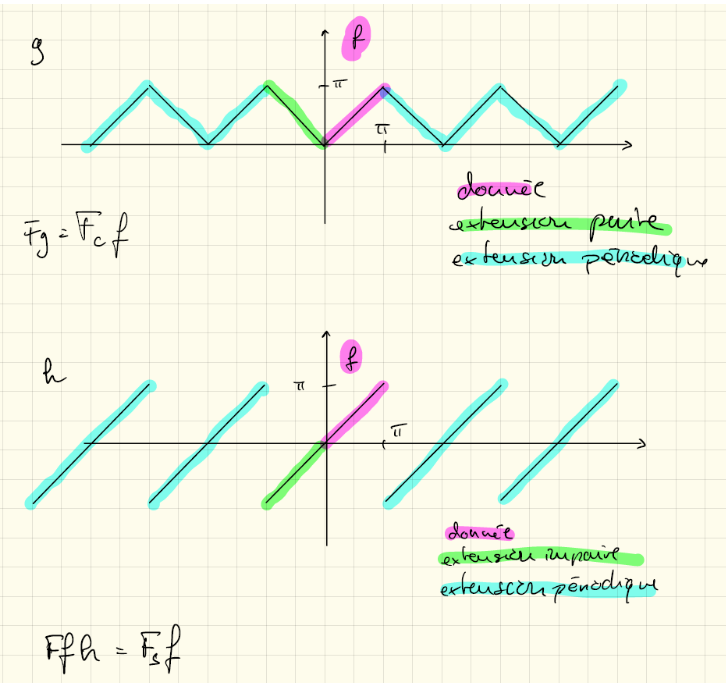
$$F_s f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

(ii) La série de Fourier en cosinus $F_c(f)$ correspond à la série de Fourier d'une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est 2π-périodique et *paire*, et égale à f sur $[0, \pi[$. Comme la fonction g est continue sur $[0, \pi]$, on a par le théorème de Dirichlet

$$F_c f(x) = Fg(x) = g(x) = f(x), \qquad \text{pour tout } x \in [0, \pi].$$

La série de Fourier en sinus $F_s(f)$ correspond à la série de Fourier d'une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est 2π-périodique et *impaire*, et égale à f sur $[0, \pi[$. La fonction h est continue sur $[0, \pi[$ et a une discontinuité en π. Ainsi, par le théorème de Dirichlet

$$F_s f(x) = Fh(x) = h(x) = f(x), \quad \text{pour tout } x \in [0, \pi[, \text{ et}$$
$$F_s f(\pi) = Fh(\pi) = \frac{h(\pi - 0) + h(\pi + 0)}{2} = 0 \neq \pi = f(\pi).$$



(iii) D'après le point précédent, on trouve

$$\frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = F_s f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

et donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$. De la même manière, on a

$$0 = f(0) = F_c f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Exercice 5.

Soit f la fonction 2π-périodique définie dans l'exercice 1 (14.5). Posons

$$F(x) = \int_0^x f(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) La fonction F est-elle 2π-périodique ? Justifier votre réponse.

(ii) En utilisant la série de Fourier de f, trouver la série de Fourier de F. On donnera explicitement le terme constant de cette série.

Solution :

(i) Comme la function f est 2π-périodique et impaire, on conclut que

$$\int_0^{2\pi} f(y)\,dy = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,dy = 0,$$

et donc F est 2π-périodique par la Remarque 4.21. On montre aussi que F est paire. En effet,

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(y)\,dy = -\int_0^{x} f(-z)\,dz = \int_0^{x} f(z)\,dz = F(x),$$

où on a utilisé le changement de variable $z = -y$, et le fait que f est impaire. De plus,

$$F(x) = \int_0^x y(\pi - y)\,dy = \pi\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}, \quad x \in [0,\pi].$$

(ii) Si A_n et B_n sont les coefficients de Fourier de F et a_n et b_n ceux de f, on a alors par la proposition 4.20 du cours

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) =& Ff(x)\\ =& FF'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(nB_n\cos(nx) - nA_n\sin(nx))\end{aligned}$$

En identifiant terme à terme, on déduit pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}A_n &= -\frac{b_n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{-8}{\pi(2k-1)^4} & \text{si } n = 2k-1 \text{ impair}\end{cases}\\ B_n &= \frac{a_n}{n} = 0.\end{aligned}$$

Il nous reste donc à calculer A_0. Plusieurs façon de le faire.
Avec la définition (recommandé) :

$$\begin{aligned}A_0 &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\pi\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]dx\\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^4}{6} - \frac{\pi^4}{12}\right) = \frac{\pi^3}{6}.\end{aligned}$$

Ainsi, la série de Fourier de F est donnée par

$$\frac{\pi^3}{12} - \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}\cos\left((2n-1)x\right).$$

En évaluant (pas recommandé) : En évaluant en 0 et en utilisant le théorème de Dirichlet (F est continue en 0) on a

$$0 = F(0) = \frac{A_0}{2} - \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

Or, par l'exercice 3,

$$\frac{A_0}{2} = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{8}{\pi}\frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^3}{12}$$

Le fait qu'on a besoin de connaître la valeur de la série qui apparaît dans ce calcul est la raison pour laquelle cette méthode n'est pas recommandée. En effet, rien ne nous indique que la séire qu'on doit calculer ainsi soit connue.