

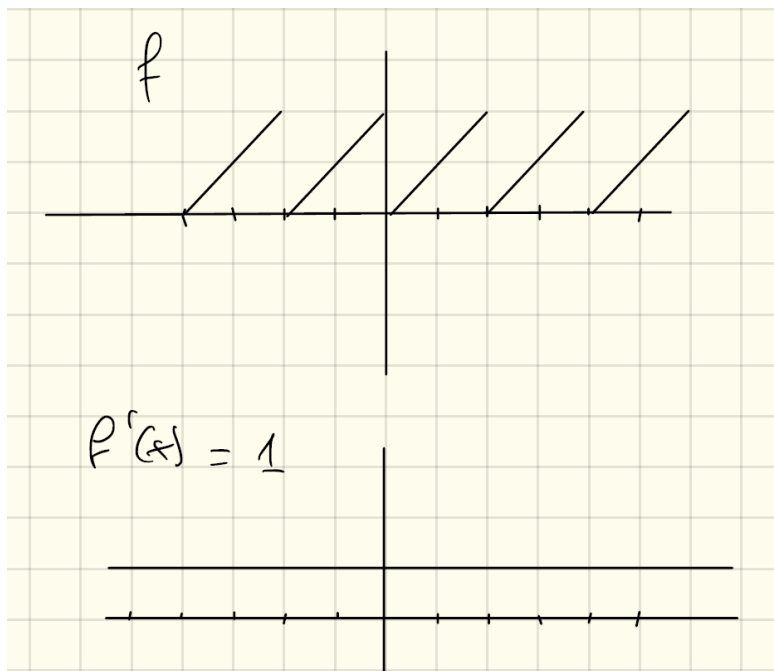
**Exercice 1** (ex 14.4 p. 220, corrigé p. 225).

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par périodicité de période 2 telle que

$$f(x) = x \quad \text{si } x \in [0, 2[.$$

Calculer la série de Fourier en notation complexe.

**Solution :**



On a ici  $T = 2$  et  $f(x) = x$  pour  $x \in ]0, 2[$ . Ainsi, pour  $n \in \mathbb{Z}^*$ ,

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 x dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_{x=0}^{x=2} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i \frac{2\pi n}{T} x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \underbrace{x}_u \underbrace{e^{-in\pi x}}_{v'} dx \end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{ll} u = x & v = -\frac{1}{in\pi} e^{-in\pi x} \\ u' = 1 & v' = e^{-in\pi x} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{1}{2} \left[ -\frac{x}{in\pi} e^{-in\pi x} \right]_{x=0}^{x=2} + \frac{1}{2in\pi} \int_0^2 e^{-in\pi x} dx \\ &= -\frac{1}{in\pi} e^{-in2\pi} + \frac{1}{2in\pi} \left[ \frac{-1}{in\pi} e^{-in\pi x} \right]_{x=0}^{x=2} \\ &= -\frac{1}{in\pi} - \frac{1}{2i^2 n^2 \pi^2} e^{-in2\pi} + \frac{1}{2i^2 n^2 \pi^2} \\ &= \frac{i}{n\pi} \end{aligned}$$

Et donc,

$$Ff(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} x} = 1 + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{i}{n\pi} e^{in\pi x}$$

**Exercice 2** (ex 14.11 p. 221, corrigé p. 229). (i) En utilisant les notations complexes, calculer la série de Fourier de la fonction  $2\pi$ -périodique et impaire donnée sur  $[0, \pi]$  par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x & \text{si } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

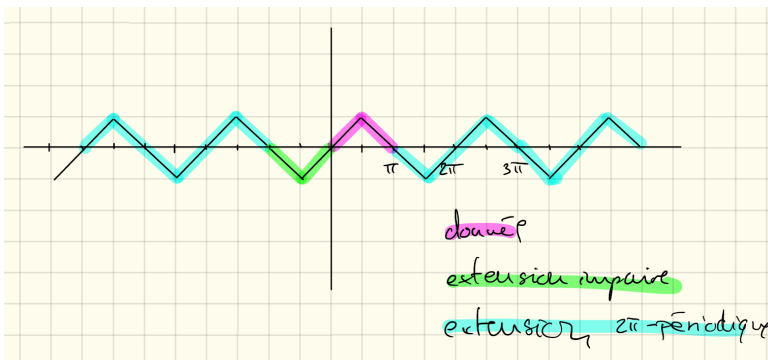
(ii) En déduire que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

**Solution :**

L'extension impaire de  $f$  à  $]-\pi, \pi]$  est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ -f(-x) & \text{si } -\pi < x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -x - \pi & \text{si } -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ x & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{si } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$



(i) Variante 1 : Définition des coefficients complexes.

On a  $T = 2\pi$  et on connaît  $f$  sur  $]-\pi, \pi]$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i \frac{2\pi n}{T} x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{-\pi/2} (-x - \pi) e^{-inx} dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x e^{-inx} dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) e^{-inx} dx \right) \end{aligned}$$

Remarquons ici que par périodicité, on pourrait regrouper la première et la dernière intégrale en une seule :

$$\int_{-\pi}^{-\pi/2} (-x - \pi) e^{-inx} dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) e^{-inx} dx = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\pi - x) e^{-inx} dx.$$

En gros, on remplace la branche verte descendante dans le graphe par la branche bleue descendante juste à droite de la partie violette.

Néanmoins, vu que la tâche qui m'attend après l'écriture de ce corrigé est particulièrement pénible, je préfère écrire un corrigé plus long et calculer les trois intégrales séparément.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\pi}^{-\pi/2} (-x - \pi) e^{-inx} dx \\
&\stackrel{\text{IPP}}{=} \left[ (x + \pi) \frac{1}{in} e^{-inx} \right]_{-\pi}^{-\pi/2} - \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{-\pi/2} e^{-inx} dx \quad \left| \begin{array}{l} u = -x - \pi \quad v = \frac{-1}{in} e^{-inx} \\ u' = -1 \quad v' = e^{-inx} \end{array} \right. \\
&= \frac{\pi}{2} \frac{1}{in} e^{in\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n^2} \left[ e^{-inx} \right]_{-\pi}^{-\pi/2} \\
i^{-1} &\stackrel{=}{=} -i - \frac{i\pi}{2n} e^{in\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n^2} e^{in\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n^2} (-1)^n.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x e^{-inx} dx \\
&= \frac{-1}{in} \left[ x e^{-inx} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{in} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-inx} dx \quad \left| \begin{array}{l} u = x \quad v = \frac{-1}{in} e^{-inx} \\ u' = 1 \quad v' = e^{-inx} \end{array} \right. \\
&= -\frac{\pi}{2in} e^{-in\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2in} e^{in\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n^2} \left[ e^{-inx} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
i^{-1} &\stackrel{=}{=} -i \frac{i\pi}{2n} e^{-in\frac{\pi}{2}} + \frac{i\pi}{2n} e^{in\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n^2} e^{-in\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n^2} e^{in\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) e^{-inx} dx \\
&\stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{i}{n} \left[ (\pi - x) e^{-inx} \right]_{\pi/2}^{\pi} + \frac{i}{n} \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-inx} dx \quad \left| \begin{array}{l} u = \pi - x \quad v = \frac{i}{n} e^{-inx} \\ u' = -1 \quad v' = e^{inx} \end{array} \right. \\
&= -\frac{i\pi}{2n} e^{-in\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n^2} \left[ e^{-inx} \right]_{\pi/2}^{\pi} \\
&= -\frac{i\pi}{2n} e^{-in\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n^2} e^{-in\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n^2} (-1)^n.
\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 + I_3 &= -\frac{2}{n^2} e^{in\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{n^2} e^{-in\frac{\pi}{2}} = -\frac{4i}{n^2} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{4i}{(2k-1)^2} \sin\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) & \text{si } n = 2k - 1, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ \frac{4i(-1)^k}{(2k-1)^2} & \text{si } n = 2k - 1, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ce qui nous mène à

$$c_n = \frac{1}{2\pi} (I_1 + I_2 + I_3) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ \frac{2i(-1)^k}{\pi(2k-1)^2} & \text{si } n = 2k - 1, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

*Variante 2* : On calcule les coefficients réels et on utilise les formules pour trouver les coefficients complexes.

Vu que  $f$  est impaire, on sait que les coefficients de Fourier en cosinus sont tous nuls. De plus, pour  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(nx) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) \sin(nx) dx \right)
\end{aligned}$$

Calculons une primitive de  $x \sin(a \cdot x)$  pour  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\int^x t \sin(at) dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[ -\frac{t}{a} \cos(at) \right]^{t=x} + \int^x \frac{1}{a} \cos(at) dt \quad \left| \begin{array}{l} u = t \quad v = -\frac{1}{a} \cos(at) \\ u' = 1 \quad v' = \sin(at) \end{array} \right.$$

$$= -\frac{x}{a} \cos(ax) + \frac{1}{a^2} \sin(ax)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(nx) dx - \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin(nx) dx + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{n^2} \sin(nx) - \frac{x}{n} \cos(nx) \right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{n^2} \sin(nx) - \frac{x}{n} \cos(nx) \right]_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi} + 2 \left[ \frac{-1}{n} \cos(nx) \right]_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi} \\ &= \frac{2}{n^2 \pi} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{n} \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{n^2 \pi} \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} + \frac{2}{n} \cos(n\pi) + \frac{2}{n^2 \pi} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad - \frac{1}{n} \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{n} \cos(n\pi) + \frac{2}{n} \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{4}{n^2 \pi} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Pour finir,

$$\text{pour } n \geq 1, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{-i}{2} b_n = \frac{-2i}{n^2 \pi} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ \frac{2i(-1)^k}{(2k-1)^2 \pi} & \text{si } n = 2k-1 \end{cases}$$

$$\text{pour } n \leq -1, \quad c_n = \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} = \frac{i}{2} b_{-n} = \frac{2i}{n^2 \pi} \sin\left(-n \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ \frac{2i(-1)^k}{(2k-1)^2 \pi} & \text{si } n = 2k-1 \end{cases}$$

On conclut

$$Ff(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2i(-1)^k}{\pi(2k-1)^2} e^{i(2k-1)x}$$

(ii) On observe sur le graphe que  $f$  est  $C^1$  par morceaux et continue. On a donc pour tout  $x$ ,

$$Ff(x) \stackrel{\text{Dirichlet}}{=} \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \stackrel{f \in C^0}{=} f(x)$$

Pour calculer  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2k-1)^2}$  à partir de  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2i(-1)^k}{\pi(2k-1)^2} e^{i(2k-1)x}$ , on veut choisir  $x$  tel que  $e^{i(2k-1)x} \approx i(-1)^k$ . Ici,  $x = \pm \frac{\pi}{2}$  fait l'affaire. On a

$$\frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = Ff\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2i(-1)^k}{\pi(2k-1)^2} \underbrace{e^{ik\pi}}_{(-1)^k} \underbrace{e^{-i\frac{\pi}{2}}}_{-i} = \frac{2}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2k-1)^2},$$

et donc

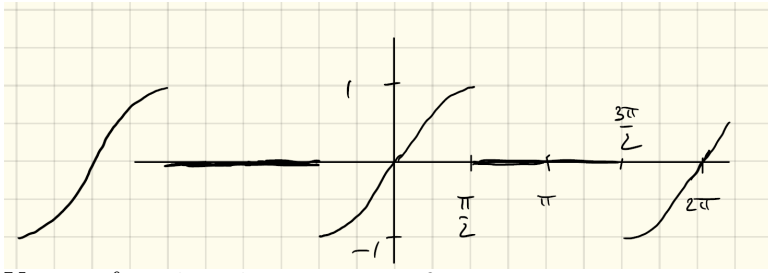
$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

**Exercice 3** (ex 14.3 p. 220, corrigé p 224).

Calculer la série de Fourier de la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}, \\ \sin(x) & \text{si } \frac{3\pi}{2} \leq x < 2\pi. \end{cases}$$

**Solution :**



Vu que  $f$  est impaire, on a  $a_n = 0$  pour tout  $n$  et

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{\pi/2} \sin(x) \sin(nx) dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \sin(x) \sin(nx) dx \right).$$

On pourrait calculer les primitives des intégrandes en utilisant les formules d'Euler :

$$\begin{aligned} \sin(x) \sin(nx) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \\ &= \frac{-1}{4} \left( e^{i(n+1)x} - e^{-i(n-1)x} - e^{i(n-1)x} + e^{-i(n+1)x} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\cos((n-1)x) - \cos((n+1)x)), \end{aligned}$$

et

$$\int \sin(x) \sin(nx) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \frac{\sin((n-1)x)}{n-1} - \frac{\sin((n+1)x)}{n+1} \right) & \text{si } n \neq 1 \\ \frac{1}{2} \left( x - \frac{\sin(2x)}{2} \right) & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

On va calculer les intégrales en utilisant l'intégration par parties pour  $n \neq 1$ .

Si  $n = 1$ ,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) dx = \frac{1}{2} [x - \cos(x) \sin(x)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} \\ I_2 &= \int_{3\pi/2}^{2\pi} \sin^2(x) dx = \frac{1}{2} [x - \cos(x) \sin(x)]_{3\pi/2}^{2\pi} = \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

et donc

$$b_1 = \frac{1}{\pi} (I_1 + I_2) = \frac{1}{2}.$$

Si  $n > 1$ ,

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^{\pi/2} \sin(x) \sin(nx) dx \\
 &\stackrel{\text{IPP}}{=} [-\cos(x) \sin(nx)]_0^{\pi/2} + n \int_0^{\pi/2} \cos(x) \cos(nx) dx & \left| \begin{array}{l} u = \sin(nx) \quad v = -\cos(x) \\ u' = n \cos(nx) \quad v' = \sin(x) \end{array} \right. \\
 &\stackrel{\text{IPP}}{=} n [\sin(x) \cos(nx)]_0^{\pi/2} + n^2 \int_0^{\pi/2} \sin(x) \sin(nx) dx & \left| \begin{array}{l} u = \cos(nx) \quad v = \sin(x) \\ u' = -n \sin(nx) \quad v' = \cos(x) \end{array} \right. \\
 &= n \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) + n^2 I_1 \\
 &= n \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) + n^2 I_1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{3\pi/2}^{2\pi} \sin(x) \sin(nx) dx \\
 &\stackrel{\text{IPP}}{=} [-\cos(x) \sin(nx)]_{3\pi/2}^{2\pi} + n \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos(x) \cos(nx) dx & \left| \begin{array}{l} u = \sin(nx) \quad v = -\cos(x) \\ u' = n \cos(nx) \quad v' = \sin(x) \end{array} \right. \\
 &\stackrel{\text{IPP}}{=} n [\sin(x) \cos(nx)]_{3\pi/2}^{2\pi} + n^2 \int_{3\pi/2}^{2\pi} \sin(x) \sin(nx) dx & \left| \begin{array}{l} u = \cos(nx) \quad v = \sin(x) \\ u' = -n \sin(nx) \quad v' = \cos(x) \end{array} \right. \\
 &= -n \underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{=-1} \cos\left(n \frac{3\pi}{2}\right) + n^2 I_2 \\
 &= n \cos\left(n \frac{3\pi}{2}\right) + n^2 I_2.
 \end{aligned}$$

Si  $n$  est pair ( $n = 2k$ ),  $\cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k$ ,  $\cos\left(n \frac{3\pi}{2}\right) = \cos(3k\pi) = (-1)^k$  et donc

$$\begin{aligned}
 I_1 &= 2k(-1)^k + 4k^2 I_1 & \Rightarrow & \quad I_1 = \frac{2k(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} \\
 I_2 &= 2k(-1)^k + 4k^2 I_2 & \Rightarrow & \quad I_2 = \frac{2k(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1}
 \end{aligned}$$

$$I_1 + I_2 = \frac{4k(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1}$$

Si  $n$  est impair ( $n = 2k - 1$ ),  $\cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ ,  $\cos\left(n \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(3k\pi - \frac{3\pi}{2}\right) = 0$  et donc

$$\begin{aligned}
 I_1 &= (2k - 1)^2 I_1 & \Rightarrow & \quad I_1 = 0 \\
 I_2 &= (2k - 1)^2 I_2 & \Rightarrow & \quad I_2 = 0
 \end{aligned}$$

$$I_1 + I_2 = 0$$

Pour finir, on arrive à

$$b_n = \frac{1}{\pi} (I_1 + I_2) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n = 1 \\ \frac{4k(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2 - 1)} & \text{si } n = 2k \geq 2 \\ 0 & \text{si } n = 2k - 1 \geq 3 \end{cases}$$

et

$$Ff(x) = \frac{1}{2} \sin(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2 - 1)} \sin(2kx).$$

**Exercice 4** (ex 14.8 p. 221, corrigé 227). (i) Calculer la série de Fourier de la fonction  $2\pi$ -périodique définie par

$$f(x) = |\cos(x)| \quad \text{si } x \in [0, 2\pi[.$$

(ii) En déduire la somme de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}.$$

**Solution :**

(i) Vu que  $f$  est paire, on a  $b_n = 0$  pour tout  $n$ . De plus,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\cos(x)| dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi/2} \cos(x) dx - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(x) dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos(x) dx \right) = \frac{4}{\pi} \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\cos(x)| \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi/2} \cos(x) \cos(nx) dx - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(x) \cos(nx) dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos(x) \cos(nx) dx \right) \end{aligned}$$

Comme dans l'exercice précédent, on pourrait calculer ces intégrales en faisant des IPP successives et en arrivant à une équation pour notre intégrale. Cette fois-ci, on utilise la méthode avec les formules d'Euler pour arriver directement à une primitive.

On a

$$\begin{aligned} \cos(x) \cos(nx) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \\ &= \frac{1}{4} \left( e^{i(n+1)x} + e^{-i(n-1)x} + e^{i(n-1)x} + e^{-i(n+1)x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) \right). \end{aligned}$$

Et donc

$$\int \cos(x) \cos(nx) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x) & \text{si } n = 1 \\ \frac{\sin((n+1)x)}{2(n+1)} + \frac{\sin((n-1)x)}{2(n-1)} & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

On obtient alors, si  $n = 1$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\cos(x)| \cos(nx) dx &= \frac{1}{4} \sin(\pi) + \frac{\pi}{4} - 0 - 0 - \frac{1}{4} \sin(3\pi) - \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin(\pi) + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin(4\pi) \\ &\quad + \pi - \frac{1}{4} \sin(3\pi) - \frac{3\pi}{2} = 0 \end{aligned}$$

et si  $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |\cos(x)| \cos(nx) dx &= \frac{1}{2(n+1)} \sin\left(\left(n+1\right)\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2(n-1)} \sin\left(\left(n-1\right)\frac{\pi}{2}\right) \\
&\quad - \frac{1}{2(n+1)} \sin\left(\left(n+1\right)0\right) + \frac{1}{2(n-1)} \sin\left(\left(n-1\right)0\right) \\
&\quad - \frac{1}{2(n+1)} \sin\left(\left(n+1\right)\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{1}{2(n-1)} \sin\left(\left(n-1\right)\frac{3\pi}{2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2(n+1)} \sin\left(\left(n+1\right)\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2(n-1)} \sin\left(\left(n-1\right)\frac{\pi}{2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2(n+1)} \sin\left(\left(n+1\right)2\pi\right) + \frac{1}{2(n-1)} \sin\left(\left(n-1\right)2\pi\right) \\
&\quad - \frac{1}{2(n+1)} \sin\left(\left(n+1\right)\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{1}{2(n-1)} \sin\left(\left(n-1\right)\frac{3\pi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{n+1} \sin\left(\left(n+1\right)\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{n-1} \sin\left(\left(n-1\right)\frac{\pi}{2}\right) \\
&\quad - \frac{1}{n+1} \sin\left(\left(n+1\right)\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{1}{n-1} \sin\left(\left(n-1\right)\frac{3\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Si  $n$  est impair, chaque terme est nul. Si  $n$  est pair ( $n = 2k$ ),

$$\begin{aligned}
\sin\left(\left(n+1\right)\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k \\
\sin\left(\left(n-1\right)\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^{k+1} \\
\sin\left(\left(n+1\right)\frac{3\pi}{2}\right) &= \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 3k\pi\right) = (-1)^{k+1} \\
\sin\left(\left(n-1\right)\frac{3\pi}{2}\right) &= \sin\left(-\frac{3\pi}{2} + 3k\pi\right) = (-1)^k
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |\cos(x)| \cos(nx) dx &= \frac{(-1)^k}{2k+1} + \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} - \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} - \frac{(-1)^k}{2k-1} \\
&= \frac{2(-1)^k(2k-1-2k-1)}{4k^2-1} = \frac{4(-1)^{k+1}}{4k^2-1}.
\end{aligned}$$

Pour finir,

$$Ff(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} \cos(2kx)$$

(ii) On observe sur la graphes que  $f$  est  $C^1$  par morceaux et continue. On a donc pour tout  $x$ ,

$$Ff(x) \stackrel{\text{Dirichlet}}{=} \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \stackrel{f \in C^0}{=} f(x)$$

Pour calculer  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$  à partir de  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} \cos(2kx)$ , il faut choisir  $x$  de telle sorte que  $\cos(2kx) \approx (-1)^k$ . Choisir  $x = \frac{\pi}{2}$  fait l'affaire.

$$0 = \left| \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = Ff\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} (-1)^k = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}$$

**Exercice 5** (ex 14.10 p. 221, corrigé p. 228). (i) Pour  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , calculer la série de Fourier de la fonction  $2\pi$ -périodique définie par

$$f(x) = \cos(\alpha x) \quad \text{si } x \in [-\pi, \pi[.$$

(ii) En déduire la formule

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha \tan(\alpha\pi)}.$$

**Solution :**

(i) Vu que  $f$  est paire, les coefficients en sinus sont nuls. Pour les coefficients en cosinus, on a  $T = 2\pi$ ,  $f(x) = \cos(\alpha x)$  pour  $x \in ]-\pi, \pi]$  et donc

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\alpha x) dx = \frac{2}{\alpha\pi} [\sin(\alpha x)]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2}{\alpha\pi} \sin(\alpha\pi)$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\alpha x) \cos(nx) dx$$

À nouveau, on a le choix entre les formules d'Euler ou les IPP pour calculer l'intégrale :

*Variante 1 : Formules d'Euler.*

$$\begin{aligned} \cos(\alpha x) \cos(nx) &= \frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2} \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \\ &= \frac{1}{4} (e^{i(\alpha+n)x} + e^{i(\alpha-n)x} + e^{-i(\alpha-n)x} + e^{-i(\alpha+n)x}) \\ &= \frac{1}{2} \cos((\alpha+n)x) + \frac{1}{2} \cos((\alpha-n)x) \end{aligned}$$

$$\int^x \cos(\alpha x) \cos(nx) dx = \frac{1}{2(\alpha+n)} \sin((\alpha+n)x) + \frac{1}{2(\alpha-n)} \sin((\alpha-n)x).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{2(\alpha+n)} \sin((\alpha+n)x) + \frac{1}{2(\alpha-n)} \sin((\alpha-n)x) \right]_{x=0}^{x=\pi} \\ &= \frac{1}{\pi(\alpha+n)} \sin(\alpha\pi + n\pi) + \frac{1}{\pi(\alpha-n)} \sin(\alpha\pi - n\pi) \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi(\alpha+n)} \sin(\alpha\pi) + \frac{(-1)^n}{\pi(\alpha-n)} \sin(\alpha\pi) \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi} \frac{\alpha - n + \alpha + n}{\alpha^2 - n^2} \sin(\alpha\pi) \\ &= \frac{2(-1)^n \alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \sin(\alpha\pi) \end{aligned}$$

*Variante 2 : IPPs*

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi \underbrace{\cos(\alpha x)}_{=u'} \underbrace{\cos(nx)}_v dx && \left| \begin{array}{l} u = \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x) \quad v = \cos(nx) \\ u' = \cos(\alpha x) \quad v' = -n \sin(nx) \end{array} \right. \\
&\stackrel{\text{IPP}}{=} \left[ \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x) \cos(nx) \right]_{x=0}^{x=\pi} + \frac{n}{\alpha} \int_0^\pi \sin(\alpha x) \sin(nx) dx \\
&= \frac{(-1)^n}{\alpha} \sin(\alpha\pi) + \frac{n}{\alpha} \int_0^\pi \underbrace{\sin(\alpha x)}_{=u'} \underbrace{\sin(nx)}_v dx && \left| \begin{array}{l} u = \frac{-1}{\alpha} \cos(\alpha x) \quad v = \sin(nx) \\ u' = \sin(\alpha x) \quad v' = n \cos(nx) \end{array} \right. \\
&\stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{(-1)^n}{\alpha} \sin(\alpha\pi) - \frac{n}{\alpha} \left[ \frac{1}{\alpha} \cos(\alpha x) \sin(nx) \right]_{x=0}^{x=\pi} \\
&\quad + \frac{n^2}{\alpha^2} \int_0^\pi \cos(\alpha x) \cos(nx) dx \\
&= \frac{(-1)^n}{\alpha} \sin(\alpha\pi) + \frac{n^2}{\alpha^2} I
\end{aligned}$$

Ainsi

$$I = \frac{\frac{(-1)^n}{\alpha} \sin(\alpha\pi)}{1 - \frac{n^2}{\alpha^2}} = \frac{\alpha(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \sin(\alpha\pi)$$

Et donc,

$$a_n = \frac{2}{\pi} I = \frac{2(-1)^n \alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \sin(\alpha\pi)$$

Pour finir, la série de Fourier de  $f$  est

$$\begin{aligned}
Ff(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \\
&= \frac{1}{\alpha\pi} \sin(\alpha\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \sin(\alpha\pi) \cos(nx)
\end{aligned}$$

- (ii) Pour trouver la valeur de  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2}$  à partir de  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \sin(\alpha\pi) \cos(nx)$ , on a besoin de choisir  $x$  tel que  $(-1)^n \cos(nx) \approx 1$ . En choisissant  $x = \pi$ , on a  $\cos(nx) = \cos(n\pi) = (-1)^n$  et on obtient

$$Ff(\pi) = \frac{1}{\alpha\pi} \sin(\alpha\pi) - \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2}$$

De plus, vu que  $f$  est continue, on a  $Ff(\pi) = f(\pi) = \cos(\alpha\pi)$ .

On déduit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha \sin(\alpha\pi)} Ff(\pi) = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha \tan(\alpha\pi)},$$

qui est le résultat voulu.