Séries 13 et 14 11 et 18 décembre 2025

Les exercices 2 et 17.7 ci-dessous seront discutés pendant le cours.

Exercice 1.

17.11

Exercice 2.

En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier et la table, trouvez une solution $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation

$$y(x) + 2y''(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \big(y^{(4)}(t) - 4y''(t) + 4y(t)\big) e^{-\sqrt{2}|x-t|}\, dt = 5e^{-5x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3.

17.5 / 17.7 / 17.8 / 17.10

Exercice 4.

On considère une fonction continue g définie sur l'intervalle fermé $[0,1]$ et on cherche une fonction u deux fois continûment dérivable sur $]0,1[$ qui satisfait :

$$\begin{cases} -u''(x) + 5u(x) = g(x), & 0 < x < 1 \\ u(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

On va chercher une solution $u(x)$ de la forme

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{2} x\right)$$

1. Calculer formellement $u(0)$ et $u'(1)$ et donner une condition sur les b_k pour que $u'(1) = 0$.

2. Poser $G(x) = \begin{cases} g(x) \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ g(2-x) \text{ si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$ et $U(x) = \begin{cases} u(x) \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ u(2-x) \text{ si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

Montrer que les coefficients g_k de la série de Fourier en sinus de G (définie sur $[0,2]$) sont

$$g_k = \begin{cases} 0 \text{ si } k \text{ est pair} \\ \beta_k \text{ si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

où $\beta_k = 2\int_0^1 g(x) \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) dx$.

3. Exprimer les b_k en fonction des β_k.

4. Que valent les β_k (k impair) si $g(x) = 1$, $\forall x \in [0,1]$? Calculer les b_k dans ce cas.