EPFL - SMA | ANALAYSE III
Prof. R. Dalang | AUTOMNE 2025

Série 1 | 11 septembre 2025

Les exercices 6 et 7 ci-dessous seront discutés pendant le cours.

Exercice 1. (Ex. 1.1)
Soit
$$F(x,y,z) = \big(y^2 \sin(xz),\ \mathrm{e}^y \cos(x^2+z),\ \ln\big(2+\cos(xy)\big)\big) =: (F_1, F_2, F_3).$$
Calculer :
(a) $\operatorname{grad} F_1,\ \operatorname{grad} F_2,\ \operatorname{grad} F_3$; (b) $\operatorname{div} F$; (c) $\operatorname{rot} F$.

Exercice 2. (Ex. 1.2)
Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est $C^1(\mathbb{R}^3)$ et $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est $C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$, alors parmi les expressions suivantes lesquelles ont un sens ?

(a) $\operatorname{grad} f$ (b) $f \operatorname{grad} f$ (c) $F \cdot \operatorname{grad} f$ (d) $\operatorname{div} f$
(e) $\operatorname{div}(fF)$ (f) $\operatorname{rot}(fF)$ (g) $\operatorname{rot} f$ (h) $f \operatorname{rot} F$ (i) $\operatorname{rot} \operatorname{div} F$.

Exercice 3. (Exemple 1.3)
Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, et r tels que $r = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2}$. Soit f le champ scalaire défini par $f(x) = 1/r$. Calculer Δf.

Exercice 4. Ex. 1.5).
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert. Montrer que :
(a) Si $f \in C^2(\Omega)$, alors : $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f$.
(b) Si $f \in C^2(\Omega)$ et $F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, alors :
$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = (0,0,0) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0.$$

Exercice 5. (Ex. 1.6)
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert. Montrer que :
a) Si $f \in C^1(\Omega)$ et $g \in C^2(\Omega)$, alors : $\operatorname{div}\big(f \operatorname{grad} g\big) = f\,\Delta g + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g$.
b) Si $f, g \in C^1(\Omega)$, alors : $\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$.

Exercice 6. (Ex. 1.7)
a) Si $f \in C^1(\Omega)$ et $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, alors : $\operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div} F + F \cdot \operatorname{grad} f$.
b) Si $F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, alors : $\operatorname{rot} \operatorname{rot} F = -\Delta F + \operatorname{grad} \operatorname{div} F$, où pour $F = (F_1, F_2, F_3)$ on note $\Delta F = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3)$.
c) Si $f \in C^1(\Omega)$ et $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, alors : $\operatorname{rot}(fF) = \operatorname{grad} f \wedge F + f \operatorname{rot} F$.

Exercice 7.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert, $F, G \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Montrer que pour $i = 1, 2, 3$,
$$\frac{\partial}{\partial x_i}[F \wedge G] = \frac{\partial F}{\partial x_i} \wedge G + F \wedge \frac{\partial G}{\partial x_i}$$