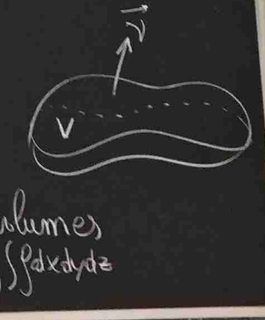
vidéo, photos, examen QCM + Ouverte

Contenu : Partie 1 analyse vectorielle

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$

intégrales sur

des courbes $\int_\Gamma \vec{f}\,d\vec{\ell}$ des surfaces $\iint_\Sigma f\,ds$ des volumes $\iiint f\,dx\,dy\,dz$





loi de conservation de la physique

equations aux dérivées partielles (Euler 1753)

méthodes numériques

Partie 2 : analyse complexe

utile en physique théorique

calculer exactement des intégrale

Chap 1 :

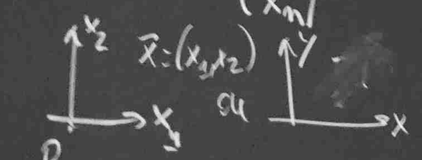
opérateurs gradient, divergence, rotationnel (curl)

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

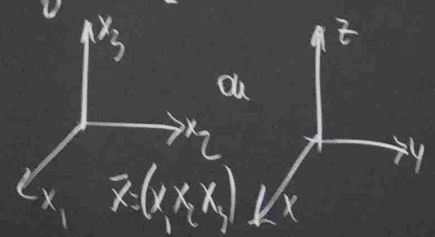
$= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$

algèbre linéaire $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$n=2$ $\vec{x} = (x_1, x_2)$ ou



$n=3$ ou



Champ scalaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\vec{x} \to f(\vec{x})$

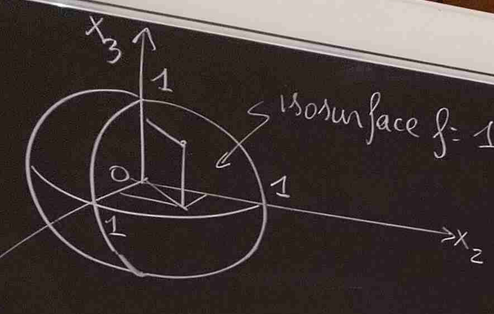
$(x_1, x_2, \dots, x_n) \to f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

ex : $n=3$ $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (= r^2)$

isosurface 1

$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$

sphère centre O rayon 1



Champ vectoriel $\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

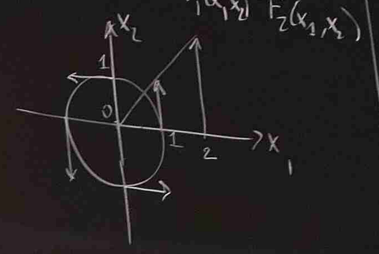
$\vec{x} \to \vec{F}(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), F_2(\vec{x}), \dots, F_n(\vec{x}))$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$= F_1(\vec{x})\vec{e}_1 + \dots + F_n(\vec{x})\vec{e}_n$

$n=2$ $\vec{F}(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$

$F_1(x_1, x_2)$ $F_2(x_1, x_2)$



Continuité, dérivabilité ($\vec{x} \in \Omega$)

$f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\vec{x} \to f(\vec{x})$ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert champ scalaire

$f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ si f est continue

$\left(\lim_{\substack{\vec{x} \to \vec{a} \\ \vec{x} \in \Omega}} f(\vec{x}) = f(\vec{a}) \right)$

$f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ si $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $i = 1, \dots, n$ existent et $\in \mathcal{C}^0(\Omega)$

$\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\vec{x} \to \vec{F}(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), \dots, F_n(\vec{x}))$

$\vec{F} \in (\mathcal{C}^0(\Omega))^n$ si F_i $i = 1, \dots, n \in \mathcal{C}^0(\Omega)$

$\vec{F} \in (\mathcal{C}^1(\Omega))^n$ si $\vec{F} \in (\mathcal{C}^0(\Omega))^n$ et $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ $i, j = 1, \dots, n$

$\vec{F} \in (\mathcal{C}^2(\Omega))^n$ si $\vec{F} \in (\mathcal{C}^1(\Omega))^n$ et $\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial x_k} \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ $i, j, k = 1, \dots, n$

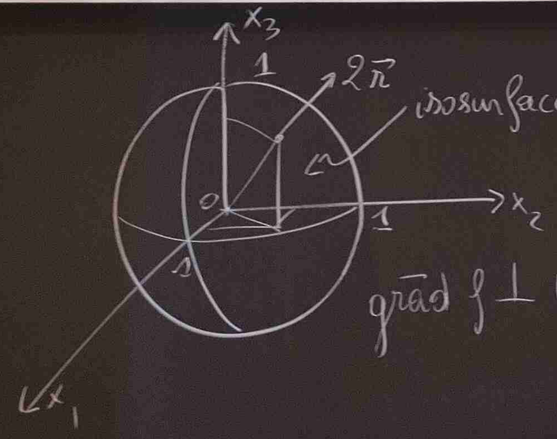
opérateurs : champ $\to$ autre champ

$f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}$ $i, j = 1, \dots, n \in \mathcal{C}^0(\Omega)$

gradient : $f \in \mathcal{C}^1(\Omega) \to \overrightarrow{\text{grad}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \in (\mathcal{C}^0(\Omega))^n$

ex $n=3$: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ $(= r^2)$

$\overrightarrow{\text{grad}} f(\longrightarrow) = (2x_1, 2x_2, 2x_3)$ $(= 2\vec{r})$



$\overrightarrow{\text{grad}} f \perp$ isosurface 1

ex : $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ $(= r)$

$\overrightarrow{\text{grad}} f(\longrightarrow) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{\quad}}, \frac{x_3}{\sqrt{\quad}} \right) \left(= \frac{\vec{r}}{r} \right)$

$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$ $\left(= \frac{1}{r} \right)$

$\overrightarrow{\text{grad}} f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{-x_1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}}, \frac{-x_2}{(\quad)^{3/2}}, \frac{-x_3}{(\quad)^{3/2}} \right) \left(= -\frac{\vec{r}}{r^3} \right)$

divergence : $\vec{F} \in (\mathcal{C}^1(\Omega))^n \longrightarrow \operatorname{div}\vec{F} \in \mathcal{C}^0(\Omega)$

$\vec{F}(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), \dots, F_n(\vec{x}))$

$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$

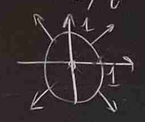
Ex $n=2$ $\vec{F}(x_1,x_2) = (-x_2, x_1)$

$F_1(x_1,x_2)$ $F_2(x_1,x_2)$

$\operatorname{div}\vec{F} = -\frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial x_1}{\partial x_2} = 0$

$\vec{F}(x_1,x_2) = (x_1, x_2)$

$\operatorname{div}\vec{F}(x_1,x_2) = 2$



Remarque $\vec{\nabla}$ "nabla"

$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ ou $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$

$\operatorname{grad} f = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f$

$\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$

rotationnel (Curl) : $n=2$ $\vec{F}(x_1,x_2) = (F_1(x_1,x_2), F_2(x_1,x_2)) \longrightarrow \operatorname{rot}\vec{F}(x_1,x_2) = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1,x_2) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_1,x_2)$

$\vec{F} \in (\mathcal{C}^1(\Omega))^2 \longrightarrow \operatorname{rot}\vec{F} \in \mathcal{C}^0(\Omega)$

Ex : $\vec{F}(x_1,x_2) = (-x_2, x_1)$

$\operatorname{rot}\vec{F} = 1 - (-1) = 2$

(tourbillon)

$n=3$ $\vec{F}(x_1,x_2,x_3) = (F_1(x_1,x_2,x_3), F_2(\ ), F_3(\ ))$

$\longrightarrow \operatorname{rot}\vec{F}(x_1,x_2,x_3) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$

ex : $\vec{F}(x_1,x_2,x_3) = (-x_2, x_1, 0)$

$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 2)$

$\vec{F}(x_1,x_2,x_3) = (F_1(x_1,x_2), F_2(x_1,x_2), 0)$

$\operatorname{rot}\vec{F}(x_1,x_2,x_3) = \left(0, 0, \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)(x_1,x_2)\right)$

$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$

laplacien: $f \in \mathcal{C}^2(\Omega) \to \Delta f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$

$$\Delta f(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\bar{x}) + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\bar{x})$$

Thm 1.2 lime:

- $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f$ (parfois $\nabla^2 f$)

$n=3$ ∘ $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \operatorname{grad} f = 0$

$n=3$ ∘ $\vec{F} \in (\mathcal{C}^2(\Omega))^3$ $\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{F} = 0$

- $f, g \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $\operatorname{grad}(fg) = (\operatorname{grad} f) g + f \operatorname{grad} g$ $\quad (fg)' = f'g + fg'$
- $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $\vec{F} \in (\mathcal{C}^1(\Omega))^n$, $\operatorname{div}(f\vec{F}) = f \operatorname{div} \vec{F} + \operatorname{grad} f \cdot \vec{F}$
- $n=3$ $\vec{F} \in (\mathcal{C}^2(\Omega))^3$, $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{F} = -\underbrace{\Delta \vec{F}}_{\begin{pmatrix}\Delta F_1 \\ \Delta F_2 \\ \Delta F_3\end{pmatrix}} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{F}$

$\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ $\quad (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3)$

- $n=3$ $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $\vec{F} \in (\mathcal{C}^1(\Omega))^3$, $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(f\vec{F}) = f \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{F} + \operatorname{grad} f \wedge \vec{F}$

Chap 1 : grad, div, rot

$f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\vec{x} \to f(\vec{x})$, $(x_1, x_2, x_3) \to f(x_1, x_2, x_3)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}^1$

$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$

$\vec{\nabla} f(\vec{x})$

$\operatorname{grad} f : \Omega \to \mathbb{R}^3$

$\vec{x} \to \operatorname{grad} f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}), \frac{\partial f}{\partial x_3}(\vec{x})\right)$

$\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^1$

$\vec{x} \to \vec{F}(\vec{x}) = \left(\vec{F}_1(\vec{x}), \vec{F}_2(\vec{x}), \vec{F}_3(\vec{x})\right)$

$\operatorname{div} \vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}$

$\vec{x} \to \operatorname{div} \vec{F}(\vec{x}) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec{x}) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\vec{x}) + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}(\vec{x})$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{x})$

$\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^1$

$\operatorname{rot} \vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$

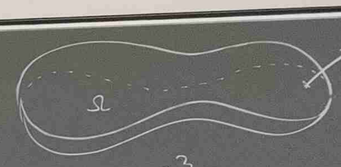
$\vec{x} \to \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_1(\vec{x}) \\ F_2(\vec{x}) \\ F_3(\vec{x}) \end{pmatrix}$

$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}(\vec{x}) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(\vec{x}), \quad , \right)$

$(1,2,3) - (2,3,1)$

But de l'analyse vect.

P.ex Chap 6 thm. divergence



$\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$\partial\Omega$ frontière (bord) surface fermée

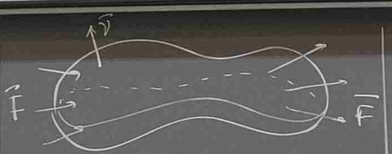
$\vec{\nu}$ normale extérieure unité

Soit $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^1$ on a

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{F} \, dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu} \, ds$$

Si $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ ($\vec{F}$ vitesse fluide à divergence nulle)

on a $\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu} \, ds = 0$



Flux entrant = Flux sortant

Exemple d'équations aux dérivées partielles

Navier-Stokes ; écoulement de liquides

Euler 1753, Navier 1822 Stokes 1850

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ $\rho > 0$ densité (kg/m^3)

$\mu > 0$ viscosité $\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)$ gravité

$\vec{v} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vitesse, $p : \Omega \to \mathbb{R}$ pression

satisfont :

$$\begin{cases} \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - \mu \Delta \vec{v} + \operatorname{grad} p = \rho \vec{g} & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0 \end{cases}$$

ici $\Delta \vec{v} = (\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3)$ $v_i(\vec{x}) = v_i(x_1, x_2, x_3)$

$\Delta v_1 = \operatorname{div} \operatorname{grad} v_1 = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2}$

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) f = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}$, $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \left((\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_1, (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_2, (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_3\right)$

$$(1) \begin{cases} \rho \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) - \mu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_1} = \rho g_1 & \text{dans } \Omega \\ \rho \left(\text{—} v_2 \text{—} v_2 \text{—} v_2 \right) - \mu \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_2} = \rho g_2 & \text{—} \\ \rho \left(\text{—} v_3 \text{—} v_3 \text{—} v_3 \right) - \mu \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_3} = \rho g_3 & \text{—} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 & \text{—} \end{cases}$$

Problème math. à résoudre :

Donné : domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\rho, \mu > 0$, $\vec{g}$, $\vec{v}$ sur le bord $\partial\Omega$

Cherché : $\vec{v}$ et p dans Ω qui satisfont (1)

méth. num.

Eq. de la chaleur

$\rho c_p > 0$ $k \geq 0$

Chal. spécifique, coeff diffusion

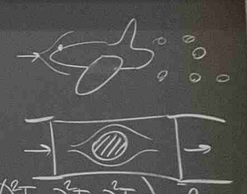
$T : \Omega \to \mathbb{R}$ température

$(x_1, x_2, x_3) \to T(x_1, x_2, x_3)$

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ source de chaleur

$\vec{v} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ convection

$$\rho c_p \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T - k \Delta T = f$$



$$\rho c_p \left(v_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) - k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \right) = f$$

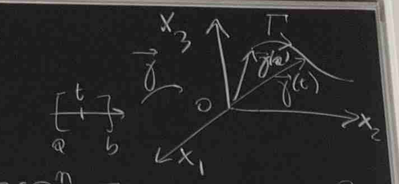
Chap 2 : intégrales curvilignes

Def 2.2 et 8.8 Line :

$\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ est une courbe simple régulière s'il existe un intervalle $[a,b]$ et une fonction (appelée paramétrisation)

$\vec{\gamma} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

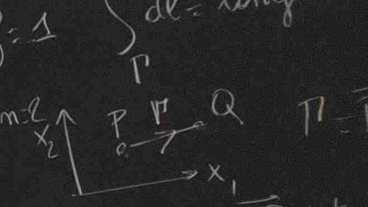
$t \longrightarrow \vec{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$ telle que



- $\Gamma = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \,;\, \exists t \in [a,b],\ \vec{x} = \vec{\gamma}(t)\}$
- $\vec{\gamma} : [a,b[\to \mathbb{R}^n$ bijective $\mathcal{C}^1[a,b]$
- $\|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \dots + (\gamma_n'(t))^2} \neq 0$

Si $f = 1$ $\int_\Gamma dl$ = longueur

Ex : n=2



$\vec{\gamma}(t) = \overrightarrow{OP} + t$

$\vec{\gamma}'(t) = \overrightarrow{PQ}$

$\int_\Gamma dl = \int$

Il existe une bije

telle que $\vec{\gamma}(t$

$\vec{\gamma}'(t$

$\int_\Gamma f\,dl = \int_a^b f($

Changement d

Ex : n=2 1/4 cercle centre 0 rayon 1

$\Gamma = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$

$\vec{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$ $\quad 0 \leq t \leq \pi/2$

$\vec{\gamma}'(t) = (-\sin t, \cos t)$ $\quad \|\vec{\gamma}'(t)\| = 1$

Remarque : il existe une infinités de param. d'une courbe Γ

ex : $\vec{\gamma}(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ $\quad 0 \leq t \leq \pi/4$

- $\vec{\gamma}'(t)$ donne la direction de la tangente

$\vec{\gamma}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{\gamma}(t+h) - \vec{\gamma}(t)}{h}$

On dit que Γ est une courbe simple régulière fermée si $\vec{\gamma}(a) = \vec{\gamma}(b)$

Ex : $\Gamma = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x_1^2 + x_2^2 = 1\}$

$\vec{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$ $\quad 0 \leq t \leq 2\pi$

Def : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\vec{x} \to f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Soit Γ courbe simple rég. de param $\vec{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}$, on définit

$$\int_\Gamma f\,dl = \int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) \|\vec{\gamma}'(t)\|\,dt$$

$$= \int_a^b f(\gamma_1(t), \dots \gamma_n(t)) \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \dots + (\gamma_n'(t))^2}\,dt$$

D'autre part

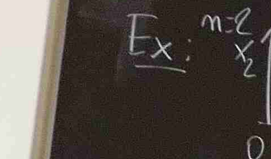
$= \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N}$

$= \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N}$

$=$

Si $f=1$ $\int_\Gamma dl$ = longueur(Γ)

Ex: $n=2$



$\Gamma = \overrightarrow{PQ}$

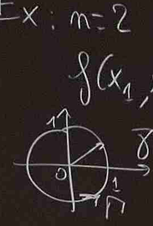
$\vec\gamma(t) = \overrightarrow{OP} + t\,\overrightarrow{PQ}$ $\quad 0\le t\le 1$

$\vec\gamma'(t) = \overrightarrow{PQ}$ $\quad \|\vec\gamma'(t)\| = \|\overrightarrow{PQ}\|$

$\int_\Gamma dl = \int_0^1 \|\overrightarrow{PQ}\|\,dt = \|\overrightarrow{PQ}\|\cdot 1$

Ex: $n=2$ cercle centre O rayon 1

$f(x_1,x_2) = x_1$ $\quad \int_\Gamma f\,dl$?



$\vec\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $\quad 0\le t\le 2\pi$

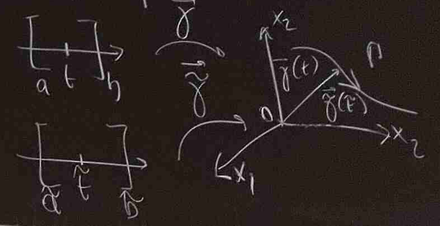
$\vec\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ $\quad \|\vec\gamma'(t)\| = 1$

$f(\vec\gamma(t)) = \cos t$

$\int_\Gamma f\,dl = \int_0^{2\pi} \cos t\,dt = 0$

Remarques:

- $\int_\Gamma f\,dl$ ne dépend pas de la param. En effet, soit $\vec\gamma$ et $\vec{\tilde\gamma}$ 2 param.



Il existe une bijection entre $[a,b]$ et $[\tilde a,\tilde b]$, $\tilde t = \varphi(t)$ avec $\varphi'(t)>0$ telle que $\vec\gamma(t) = \vec{\tilde\gamma}(\varphi(t))$

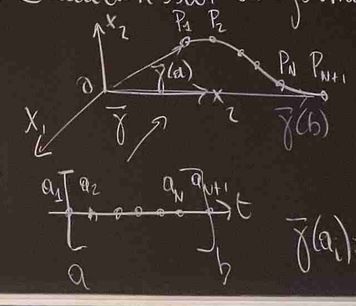
$\vec\gamma'(t) = \vec{\tilde\gamma}'(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ $\quad (\|\vec\gamma'(t)\| = \|\vec{\tilde\gamma}'(\varphi(t))\|\,\varphi'(t))$

$\int_\Gamma f\,dl = \int_a^b f(\vec\gamma(t))\,\|\vec\gamma'(t)\|\,dt = \int_a^b f(\vec{\tilde\gamma}(\varphi(t)))\,\|\vec{\tilde\gamma}'(\varphi(t))\|\,\varphi'(t)\,dt$

Changement de variable $\tilde t = \varphi(t)$ $\quad d\tilde t = \varphi'(t)\,dt$

$= \int_{\tilde a}^{\tilde b} f(\vec{\tilde\gamma}(\tilde t))\,\|\vec{\tilde\gamma}'(\tilde t)\|\,d\tilde t$

- Intuition sur la formule



$\int_\Gamma f\,dl = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \int_{P_i}^{P_{i+1}} f\,dl$

$= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \|\overrightarrow{P_iP_{i+1}}\|\,f(P_i)$ $\quad (*)$

$\vec\gamma(a_i) = \overrightarrow{OP_i}$

D'autre part $\int_a^b f(\vec\gamma(t))\,\|\vec\gamma'(t)\|\,dt$

$= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\vec\gamma(t))\,\|\vec\gamma'(t)\|\,dt$

$= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} (a_{i+1}-a_i)\,f(\vec\gamma(a_i))\,\|\vec\gamma'(a_i)\|$

$= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(\vec\gamma(a_i))\,\left\|\frac{\vec\gamma(a_{i+1})-\vec\gamma(a_i)}{a_{i+1}-a_i}\right\|$

$= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(\underbrace{\vec\gamma(a_i)}_{P_i})\,\|\underbrace{\vec\gamma(a_{i+1})-\vec\gamma(a_i)}_{\overrightarrow{P_iP_{i+1}}}\|$

qui coincide avec $(*)$

Soit $\vec F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad \mathcal{C}^0$

$\vec x \to \vec F(\vec x) = (F_1(\vec x), \dots, F_n(\vec x))$

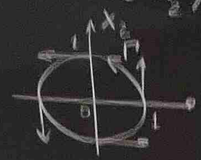
On définit $\int_\Gamma \vec F\cdot d\vec l = \int_a^b \underbrace{\vec F(\vec\gamma(t))\cdot\vec\gamma'(t)}_{\text{pdt scalaire}}\,dt$

$= \int_a^b \left(F_1(\vec\gamma(t))\,\gamma_1'(t) + \dots + F_n(\vec\gamma(t))\,\gamma_n'(t)\right)dt$

Attention: l'orientation de Γ est importante!

Si $\vec F$ est une force $\int_\Gamma \vec F\cdot d\vec l$ est le travail des forces le long de Γ.

Ex: $\vec{F}(x) = (-x_2, x_1)$



Γ : cercle centré 0, rayon 1, orienté dans le sens trigo.

$\vec{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$ ensemble

$\vec{\gamma}'(t) = (-\sin t, \cos t)$

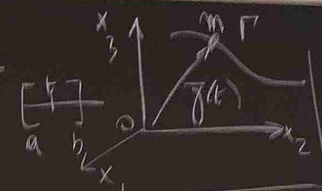
$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \Big(F_1(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\,\gamma_1'(t) + F_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\,\gamma_2'(t) \Big)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big((-\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) \Big)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = 2\pi$$

Application : thm énergie cinétique

Soit une particule de masse m qui parcourt la courbe Γ param. par $\vec{\gamma}(t)$, soumise à une force $\vec{F}(\vec{\gamma}(t))$ qui satisfait les éq. de Newton : $m\,\vec{\gamma}''(t) = \vec{F}(\vec{\gamma}(t))$



Alors on a :

$$\frac{1}{2} m \|\vec{\gamma}'(b)\|^2 - \frac{1}{2} m \|\vec{\gamma}'(a)\|^2 = \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

En effet on a :

$$m\,\vec{\gamma}''(t)\cdot\vec{\gamma}'(t) = \vec{F}(\vec{\gamma}(t))\cdot\vec{\gamma}'(t)$$

On a $\vec{\gamma}''(t)\cdot\vec{\gamma}'(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{\gamma}'(t)\|^2$

car $\frac{d}{dt}\|\vec{\gamma}'(t)\|^2 = \frac{d}{dt}\big(\vec{\gamma}'(t)\cdot\vec{\gamma}'(t)\big) = 2\,\vec{\gamma}''(t)\cdot\vec{\gamma}'(t)$

et donc $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \|\vec{\gamma}'(t)\|^2\right) = \vec{F}(\vec{\gamma}(t))\cdot\vec{\gamma}'(t)$

On intègre entre $t=a$ et $t=b$

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \|\vec{\gamma}'(t)\|^2\right) dt = \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t))\cdot\vec{\gamma}'(t)\,dt$$

$$\frac{1}{2} m \|\vec{\gamma}'(b)\|^2 - \frac{1}{2} m \|\vec{\gamma}'(a)\|^2 = \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

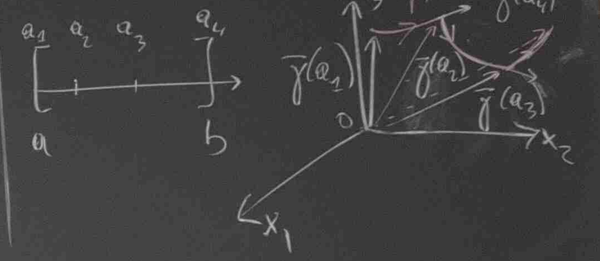
Def: 2.2 (iii) livre :

On dit que Γ est une courbe simple régulière par morceaux, s'il existe une param $\vec{\gamma}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ telle que

- $\Gamma=\{x\in\mathbb{R}^n ;\ \exists t\in[a,b],\ x=\vec{\gamma}(t)\}$
- $\vec{\gamma}:[a,b[\to\mathbb{R}$ bijective $\mathcal{C}^0[a,b]$
  $\exists\ a=a_1\le a_2\le\dots\le a_N\le a_{N+1}=b$ telle que

$\vec{\gamma}\in\mathcal{C}^1[a_i,a_{i+1}]$ $i=1,\dots,N$

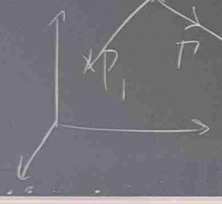
- $\vec{\gamma}'(t)\neq 0$



On définit $\displaystyle\int_\Gamma f\,dl=\sum_{i=1}^{N}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\vec{\gamma}(t))\,\|\vec{\gamma}'(t)\|\,dt$

de même $\displaystyle\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{l}=\sum_{i=1}^{N}\int_{a_i}^{a_{i+1}}\vec{F}(\vec{\gamma}(t))\cdot\vec{\gamma}'(t)\,dt$

Ex :



$\Gamma=P_1P_2\cup P_2P_3$

On n'a pas besoin d'expliciter $\vec{\gamma}:[a,b]\to\mathbb{R}$, on peut utiliser une param. sur chaque morceau. Attention il faut aller de P_1 à P_2, puis de P_2 à P_3.

Par ex : P_1P_2 : param $\vec{\gamma}(t)=\overrightarrow{OP_1}+t\overrightarrow{P_1P_2}$ $0\le t\le 1$

P_2P_3 : ——— $=\overrightarrow{OP_2}+t\overrightarrow{P_2P_3}$ ———

$$\int_\Gamma f\,dl=\int_0^1 f(\overrightarrow{OP_1}+t\overrightarrow{P_1P_2})\,\|\overrightarrow{P_1P_2}\|\,dt+\int_0^1 f(\overrightarrow{OP_2}+t\overrightarrow{P_2P_3})\,\|\overrightarrow{P_2P_3}\|\,dt$$

Rappel : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$
$t \to f(t)$

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$$

Analogue sur une courbe Γ ?

Thm 3.3 (bis) (pas énoncé dans le livre)

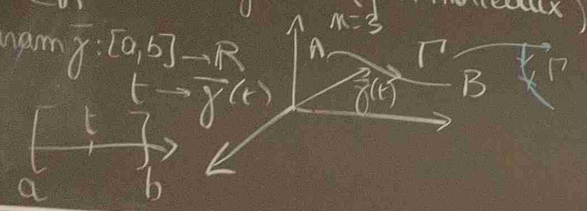
Soit Γ une courbe simple régulière par morceaux d'origine $A = \vec{\gamma}(a)$ et extrémité $B = \vec{\gamma}(b)$
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ champ scalaire

$$\int_\Gamma \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \vec{dl} = f(B) - f(A)$$

Chap 2 Int curv.

Γ simple régulière (par morceaux) $\subset \mathbb{R}^n$

paramétrisation $\vec{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $t \to \vec{\gamma}(t)$



$\gamma : [a,b[$ bij $\mathcal{C}^1[a,b]$ rég $\mathcal{C}^0[a,b]$

$a = a_1 < a_2 < \dots < a_N < a_{N+1} = b$

$\mathcal{C}^1[a_i, a_{i+1}]$ $i = 1, \dots, N$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$ $\int_\Gamma f\,dl = \int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) \|\vec{\gamma}'(t)\|\,dt$

$\vec{x} \to f(\vec{x})$

$(x_1, \dots, x_n)$

$\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^0$ $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)\,dt$

$\vec{x} \to \vec{F}(\vec{x})$

$(F_1(\vec{x}), \dots, F_n(\vec{x}))$

Thm 3.3 bis

Γ simple rég (par morceaux)

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$

$\int_\Gamma \text{grad} f \cdot d\vec{l} = f(B) - f(A)$

Corollaire. Soit $\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^0$

Si $\vec{F}$ dérive d'un potentiel

$\exists f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ tq $\vec{F} = \text{grad} f$

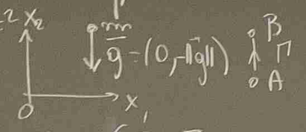
alors $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_\Gamma \text{grad} f \cdot d\vec{l} = f(B) - f(A)$

- Si $\vec{F}$ est un champ de force qui dérive d'un potentiel le travail le long de Γ

$\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{l}$ ne dépend pas du chemin choisit (Γ) mais seulement de f (potentiel) A et B

- Si $A = B$ $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$

Ex : $n=2$



$\vec{g} = (0, -\|g\|)$

$\vec{F} = m\vec{g}$ $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{l} = -m\|g\|\left((x_2)_B - (x_2)_A\right)$

Si $\Gamma : A \to B \to A$ $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$

$f(x_1, x_2) = -\|g\| x_2$

Il manque la dissipation d'énergie

Dém : cas Γ régulière, $\vec{\gamma} \in \mathcal{C}^1[a,b]$

$f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$

$f(\vec{\gamma}(t)) = f(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$

$\frac{d}{dt} f(\vec{\gamma}(t)) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{\gamma}(t))\gamma_1'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{\gamma}(t))\gamma_n'(t)$

$\int_\Gamma \text{grad} f \cdot d\vec{l} = \int_a^b \text{grad} f(\vec{\gamma}(t)), \vec{\gamma}'(t)\,dt$

$= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{\gamma}(t))\gamma_1'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{\gamma}(t))\gamma_n'(t)\right) dt$

$= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\vec{\gamma}(t))\,dt = f(\vec{\gamma}(b)) - f(\vec{\gamma}(a))$

$= f(\vec{\gamma}(B)) - f(\vec{\gamma}(A))$

Thm 3.3 Lima : Soit $\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^0$

$(\exists f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ tq $\vec{F} = \text{grad} f) \iff (\forall \Gamma \subset \mathbb{R}^n$ simple régulière (par morceaux) fermée $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0)$

$\Rightarrow$: D'après thm 3.3 bis $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_\Gamma \text{grad} f \cdot dl = f(B) - f(A) = 0$ si Γ est fermée

$\Leftarrow$: Soit $\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^0$

Soit Γ simple régulière fermée par morceaux

tq $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$, montrons

$\exists f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ tq $\vec{F} = \text{grad} f$

ie $F_i(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$

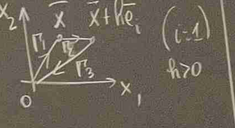
$i = 1, \dots, n$

$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Pour $i = 1, \dots, n$ on choisit Γ :

Pour $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$n = 2$



$(i = 1)$ $h > 0$

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$

$0 = \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{l} + \int_{\Gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{l} + \int_{\Gamma_3} \vec{F}\cdot d\vec{l}$

Param de Γ_1 : $\vec{\gamma}(t) = t\vec{x}$ $0 \le t \le 1$

$\int_{\Gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_0^1 \vec{F}(t\vec{x})\cdot\vec{x}\,dt = \frac{1}{t} f(\vec{x})$

Param de Γ_2 : $\vec{\gamma}(t) = \vec{x} + t\vec{he_i}$ $0 \le t \le 1$

$\vec{\gamma}'(t) = h\vec{e_i}$

$\int_{\Gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{x} + t\vec{he_i})\cdot h\vec{e_i}\,dt$

$\Rightarrow$: D'après thm 3.3 bis $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \int_\Gamma \vec{\text{grad}} f \cdot d\vec{\ell} = f(B) - f(A) = 0$ si Γ est fermée

ie $F_i(\vec{x})$

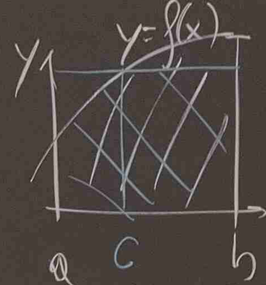
$i = 1$
$\forall \vec{x} \in$

$\int_{\Gamma_3} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = -f(\vec{x} + h\vec{e}_i)$

D'après (*) : $\dfrac{f(\vec{x}+h\vec{e}_i) - f(\vec{x})}{h} = \int_0^1 \underbrace{\vec{F}(\vec{x}+th\vec{e}_i)\cdot\vec{e}_i}_{F_i(\vec{x}+th\vec{e}_i)}\, dt$

$= F_i(\vec{x} + \theta h \vec{e}_i)$ où $0<\theta<1$

$i = 1, \dots, N$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $h > 0$



$\int_a^b f(x)dx = (b-a) f(c)$
$a < c < b$
thm moyenne

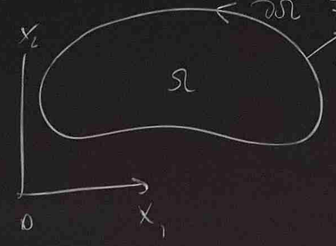
On prend la limite quand $h \to 0$

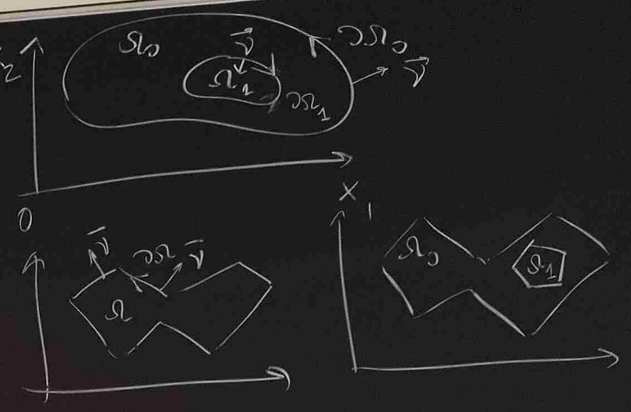
$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = F_i(\vec{x})$

Chap 4. Théorème de Green

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domaine régulier

Ex :

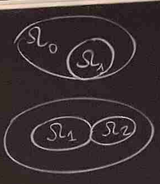




Def 4.1 Ligne :

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domaine régulier s'il existe des ouverts bornés $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ tels que

- $\Omega = \Omega_0 \setminus (\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2} \cup \dots \cup \overline{\Omega_m})$
- $\overline{\Omega_j} \subset \Omega_0 \quad j = 1, \dots, m$
- $\overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_j} = \phi$ ——
- $\partial\Omega_i = \Gamma_i$ courbe simple régulière (par morceaux) fermée

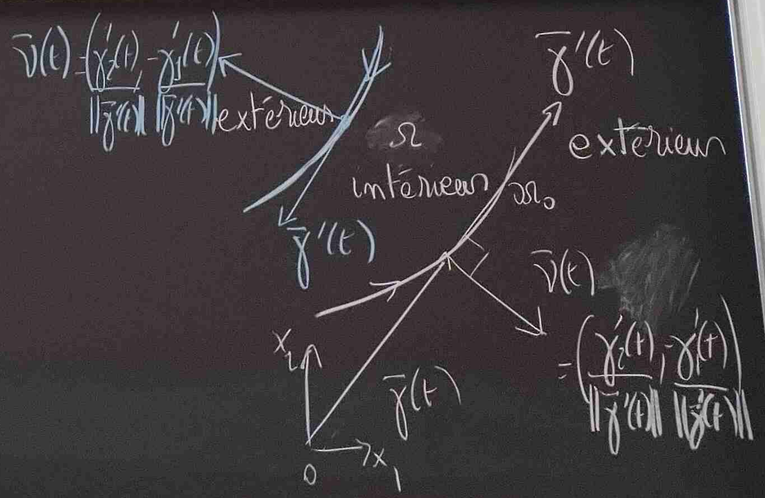


On dit que $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_m$ est orienté positivement si $\forall x \in \partial\Omega$, $\overline{x} = \overline{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$

$$\left(\frac{\overline{\gamma}'(t)}{\|\overline{\gamma}'(t)\|} = \frac{(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))}{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}} \right)$$

la normale $\overline{\nu}(t) = \left(\frac{\gamma_2'(t)}{\|\overline{\gamma}'(t)\|}, \frac{-\gamma_1'(t)}{\|\overline{\gamma}'(t)\|} \right)$

est orientée vers l'ext.



Lemme: (pas dans le livre)
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domaine régulier, orienté positivement, de normale ext. unité $\vec{\nu}(t) = (\nu_1(t), \nu_2(t))$
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un champ scal. $\mathcal{C}^1$
$\vec{x} = (x_1, x_2) \to f(\vec{x}) = f(x_1, x_2)$

Ona: $\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} f \nu_i \, d\ell \quad i = 1,2$

Si on admet mom. ce lemme on peut dém.

Corollaire (thm 4.2 corollaire 4.3 livre)

Ω dom. reg. + orienté pos, normale $\vec{\nu}$
Soit $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$\vec{x} \to \vec{F}(\vec{x}) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2))$ $\mathcal{C}^1$

Ona: $\iint_\Omega \operatorname{rot} \vec{F} \, dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$

$\iint_\Omega \operatorname{div} \vec{F} \, dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu} \, d\ell$

Dem corollaire à partir du lemme:

$$\iint_\Omega \operatorname{rot} \vec{F} \, dx_1 dx_2 = \iint_\Omega \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$$

lemme $f = F_2$ $i=1$, $f = -F_1$ $i=2$ $= \int_{\partial\Omega} (F_2 \nu_1 - F_1 \nu_2) \, d\ell$

param $\vec{\gamma}(t)$ de $\partial\Omega$ $a \le t \le b$
$\vec{\gamma}'(t)$
$\vec{\nu}(t) = \left(\frac{\gamma_2'(t)}{\|\vec{\gamma}'(t)\|}, -\frac{\gamma_1'(t)}{\|\vec{\gamma}'(t)\|} \right)$

$$= \int_a^b dt \left(F_2(\vec{\gamma}(t)) \frac{\gamma_2'(t)}{\|\vec{\gamma}'(t)\|} + F_1(\vec{\gamma}(t)) \frac{\gamma_1'(t)}{\|\vec{\gamma}'(t)\|} \right) \|\vec{\gamma}'(t)\| dt$$

$$= \int_a^b \left(F_1(\vec{\gamma}(t)) \gamma_1'(t) + F_2(\vec{\gamma}(t)) \gamma_2'(t) \right) dt$$

$$= \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

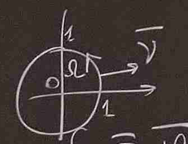
$$\iint_\Omega \operatorname{div} \vec{F} \, dx_1 dx_2 = \iint_\Omega \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$$

lemme $f = F_1$ $i=1$, $f = F_2$ $i=2$ $= \int_{\partial\Omega} (F_1 \nu_1 + F_2 \nu_2) \, d\ell$

$$= \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu} \, d\ell$$

Ex de calcul: $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; x_1^2 + x_2^2 < 1\}$

$\vec{F}(x_1, x_2) = (-(x_2)^2, x_1)$



Vérifier $\iint_\Omega \operatorname{rot} \vec{F} \, dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$

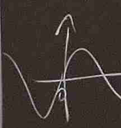
$\operatorname{rot} \vec{F} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 1 + 2x_2$

$$\iint_\Omega (1 + 2x_2) \, dx_1 dx_2 = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\theta \, (1 + 2r\sin\theta) \, r$$

$x_1 = r\cos\theta \quad 0 < r < 1$
$x_2 = r\sin\theta \quad 0 < \theta < 2\pi$

$$= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\theta \, r$$

$$= \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 2\pi = \pi$$



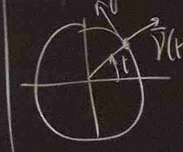
$$\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta = 0$$



$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin\theta \, d\theta$$
↑ impaire

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) \, dt$$

param de $\partial\Omega$: $\vec{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$



$\vec{\gamma}'(t) = (-\sin t, \cos t)$
$\vec{\nu}(t) = (\cos t, \sin t)$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^3 t + \cos^2 t)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt$$

$\sin^3 t$ impaire

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\, dt$$

$$= \pi$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

$F_1(x_1, x_2)$ $F_2(x_1, x_2)$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

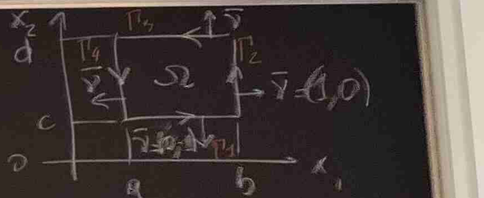
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Dém. lemme : dans des cas particuliers

- rectangle Ω
-
-

- rectangle

$i = 1$



$$\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = \int_c^d dx_2 \int_a^b dx_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)$$

$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$

$$= \int_c^d dx_2 \left(f(b, x_2) - f(a, x_2) \right)$$

$$\int_{\partial\Omega} f \nu_1 \, dl = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4} f \nu_1 \, dl$$

$$= \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_4} f \nu_1 \, dl$$

$$\int_{\Gamma_2} f \nu_1 \, dl =$$

param. de Γ_2 : $\vec{\gamma}(t) = (b, t)$ $c \le t \le d$

$\vec{\gamma}'(t) = (0, 1)$

$\vec{\nu}(t) = (1, 0)$

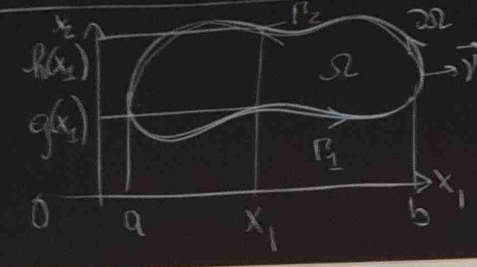
$\nu_1 = 1$ $\|\vec{\gamma}'(t)\| = 1$

$$\int_{\Gamma_2} f \nu_1 \, dl = \int_c^d dt \, f(b, t) \cdot 1 \cdot 1$$

De même $\int_{\Gamma_4} f \nu_1 \, dl = -\int_c^d dt \, f(a, t)$

Car la param $\vec{\gamma}(t) = (a, t)$ va dans le mauvais sens.

Finalement $\int_{\partial\Omega} f\nu_1 \, d\ell = \int_c^d dt\,\big(f(b,t) - f(a,t)\big) = \iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 dx_2$



$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ g(x_1) \le x_2 \le h(x_1),\ a \le x_1 \le b\}$

Montrons $\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} f\nu_2 \, d\ell$

$\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = \int_a^b dx_1 \int_{g(x_1)}^{h(x_1)} dx_2 \, \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)$

$= \int_a^b dx_1 \Big(f(x_1, h(x_1)) - f(x_1, g(x_1)) \Big)$

Param de Γ_1 : $\vec{\gamma}(t) = (t, g(t))$, $a \le t \le b$

$\vec{\gamma}'(t) = (1, g'(t))$ $\quad \|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{1 + g'(t)^2}$

$\vec{\nu}(t) = \left(\frac{g'(t)}{\|\vec{\gamma}'(t)\|}, \frac{-1}{\|\vec{\gamma}'(t)\|} \right)$

$\int_{\partial\Omega} f\nu_2 \, d\ell = \int_{\Gamma_1} f\nu_2 \, d\ell + \int_{\Gamma_2} f\nu_2 \, d\ell$

$\int_{\Gamma_1} f\nu_2 \, d\ell = \int_a^b dt\ f(t, g(t)) \frac{(-1)}{\|\vec{\gamma}'(t)\|} \|\vec{\gamma}'(t)\| dt$

$= -\int_a^b dt\ f(t, g(t))$

De même $\int_{\Gamma_2} f\nu_2 \, d\ell = +\int_a^b dt\ f(t, h(t))$

ici signe + car $(t, h(t))$ donne une normale vers le haut

Finalement

$\int_{\partial\Omega} f\nu_2 \, d\ell = \int_a^b \big(f(t, h(t)) - f(t, g(t)) \big) dt$

$= \iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_1 dx_2$

Lemme : (pas d
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$
orienté positi
ext. unité
Soit $f : \mathbb{R}^2$

Lemme: (pas dans le livre)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domaine régulier, orienté positivement, de normale ext. unité $\vec{\nu}(t) = (\nu_1(t), \nu_2(t))$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un champ scal. $\mathcal{C}^1$
$\vec{x} : (x_1, x_2) \to f(\vec{x}) = f(x_1, x_2)$

Ona: $\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} f \nu_i \, dl \quad i = 1,2$

Si on admet mom. ce lemme on peut dém.

Corollaire (thm 4.2 corollaire 4.3 livre)

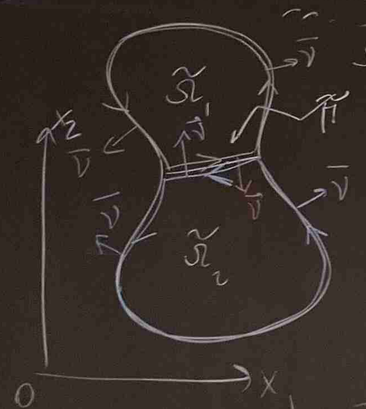
Ω dom. reg., orienté pos, normale $\vec{\nu}$

Soit $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$\vec{x} \to \vec{F}(\vec{x}) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2))$ $\mathcal{C}^1$

Ona: $\iint_\Omega \operatorname{rot} \vec{F} \, dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{l}$

$\iint_\Omega \operatorname{div} \vec{F} \, dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu} \, dl$

Dem corollaire à partir du lemme:



$\Omega = \tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_2$

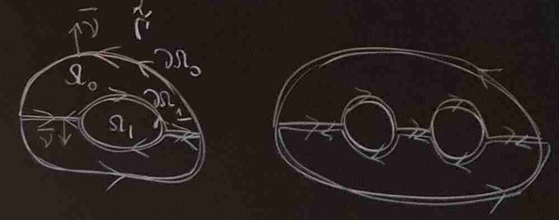
Lemme dans $\tilde{\Omega}_1$ et $\tilde{\Omega}_2$

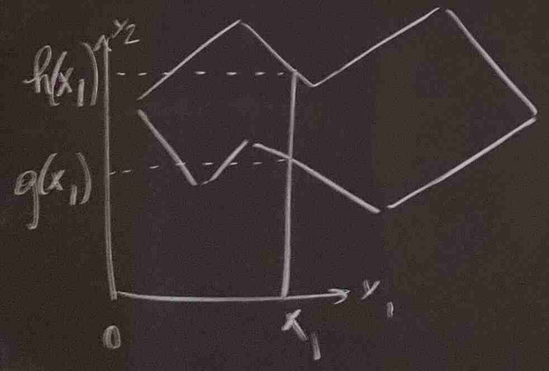
$\iint_{\tilde{\Omega}_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = \int_{\partial\tilde{\Omega}_1} f \nu_2 \, dl$

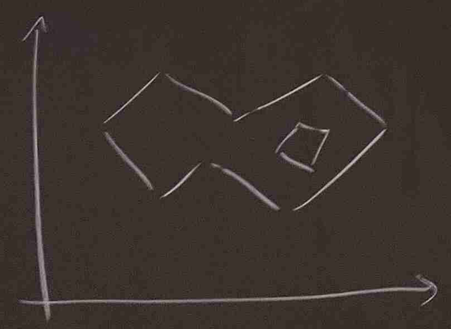
$\iint_{\tilde{\Omega}_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = \int_{\partial\tilde{\Omega}_2} f \nu_2 \, dl$ on somme

$\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = \int_{\partial\tilde{\Omega}_1} f\nu_2 dl + \int_{\partial\tilde{\Omega}_2} f\nu_2 dl = \int_{\partial\Omega} f\nu_2 dl$

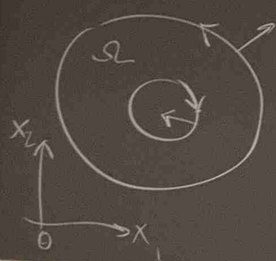
Car les deux $\int$ s'annullent







Chap 4. thm Green



$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ $\quad \iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} f \nu_i \, dl \quad i=1,2$

$\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\mathcal{C}^1$ $\quad \iint_\Omega \operatorname{div} \vec{F} \, dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu} \, dl$

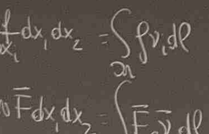
Application aux lois de conservation

Eq. conservation de la masse

vitesse $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

densité fluide $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Soit Ω un domaine régulier de $\mathbb{R}^2$, orienté positivement quelconque



Alors on doit avoir $\int_{\partial\Omega} \rho \vec{v} \cdot \vec{\nu} \, dl = 0$

flux de masse entrant = flux de masse sortant

et donc $0 = \int_{\partial\Omega} \rho \vec{v} \cdot \vec{\nu} \, dl = \iint_\Omega \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \, dx_1 dx_2$ (*)

vrai pour tout Ω

Lemme. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$ tq $\iint_\Omega f \, dx_1 dx_2 = 0$ pour tout domaine régulier Ω alors $f(\vec{x}) = 0$ $\forall \vec{x} \in \Omega$

On applique ce lemme à (*) : $f(x_1, x_2) = \operatorname{div}(\rho \vec{v}(x_1, x_2))$

$= \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho v_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho v_2)$

et on obtient $\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$ dans $\mathbb{R}^2$

" eq. de conservation de la masse "

Dem lemme : soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, on veut dem que $f(\vec{x}) = 0$, on choisit $\Omega = B(\vec{x}, \varepsilon)$ $\varepsilon > 0$



$B(\vec{x}, \varepsilon) = \Omega$

thm moyenne : $\exists (z_1, z_2) \in B(\vec{x}, \varepsilon)$ tq

$0 = \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \iint_{B(\vec{x},\varepsilon)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = f(z_1, z_2) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} f(x_1, x_2)$

Retour à l'eq. cons. masse

Si $\vec{v}(x_1, x_2, t)$ $\rho(x_1, x_2, t)$ ait et le temps

La loi de conservation devient pour tout domaine régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$\frac{d}{dt} \iint_\Omega \rho \, dx_1 dx_2 + \int_{\partial\Omega} \rho \vec{v} \cdot \vec{\nu} \, dl = 0$

la variation au cours du temps de la masse du fluide contenue dans Ω + flux de masse = 0

On permute $\frac{d}{dt}$ et $\iint_\Omega$ et on utilise le thm de Green, on obtient :

$0 = \iint_\Omega \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}(x_1, x_2, t) + \operatorname{div}\left(\rho(x_1, x_2, t) \vec{v}(x_1, x_2, t)\right) \right) dx_1 dx_2$

vrai pour tout Ω, et donc $\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$ dans $\mathbb{R}^2$

Eq. conservation de la Chaleur

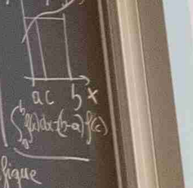
$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ température

$\vec{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vitesse

$k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ coeff diffusion

$c_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ chaleur spécifique

$k > 0$ $\rho c_p > 0$



Soit Ω un domaine rég. quelconque de $\mathbb{R}^2$ orienté positivement, on observe que :

(*) $\int_{\partial\Omega} -k \, \overrightarrow{\operatorname{grad}} T \cdot \vec{\nu} \, dl + \int_{\partial\Omega} \rho c_p T \vec{v} \cdot \vec{\nu} \, dl = 0$

flux de chaleur issu de la diffusion de la chaleur

flux de chaleur issu de la convection (enthalpie) due à $\vec{v}$

et donc $0 = \iint_\Omega \left(-\operatorname{div}(k \overrightarrow{\operatorname{grad}} T) + \operatorname{div}(\rho c_p T \vec{v}) \right) dx_1 dx_2$

ceci est vrai pour tout domaine Ω et donc

$-\operatorname{div}(k \overrightarrow{\operatorname{grad}} T) + \operatorname{div}(\rho c_p T \vec{v}) = 0$ dans $\mathbb{R}^2$

$-\operatorname{div}(k(x_1, x_2) \overrightarrow{\operatorname{grad}} T(x_1, x_2) \dots \dots)$

Si $k = \text{cste} > 0$ et $\rho c_p = \text{cste} > 0$ et $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ l'eq. devient

$-k \Delta T + \rho c_p \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} T = 0$ (**)

terme de diffusion de la chaleur

terme de convection de la chaleur

Si $T(x_1, x_2, t)$ et $\vec{v}(x_1, x_2, t)$ il faut ajouter à (*) :

$\frac{d}{dt} \iint_\Omega \rho c_p T \, dx_1 dx_2$

= énergie thermique dans Ω

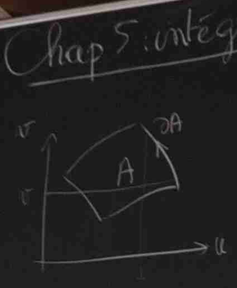
$\operatorname{div}(\rho c_p T \vec{v})$

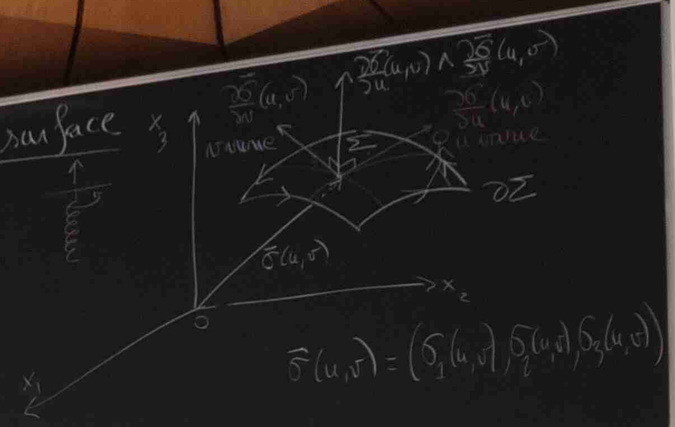
$= \rho c_p T \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\rho c_p T)$

et à la place de (**) on obtient

$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - k \Delta T + \rho c_p \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} T = 0$

Chap 5 : intégrales de surface





$$\vec{\sigma}(u,v) = (\sigma_1(u,v), \sigma_2(u,v), \sigma_3(u,v))$$

Def 8.12 Lune

i) on dit que Σ est une surface régulière s'il existe un domaine A de $\mathbb{R}^2$ et une paramétrisation $\vec{\sigma} : \overline{A} \to \Sigma$ (Σ fermé $\Sigma = \overline{\Sigma}$) bijective, C^1 et telle que $(u,v) \to \vec{\sigma}(u,v)$

$$\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v}(u,v) \neq 0 \quad (u,v) \in A$$

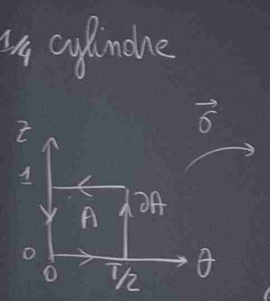
Le vecteur $\vec{\nu}(u,v) = \frac{\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v}(u,v)}{\left\| \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v}(u,v) \right\|}$ est appelé normale unité

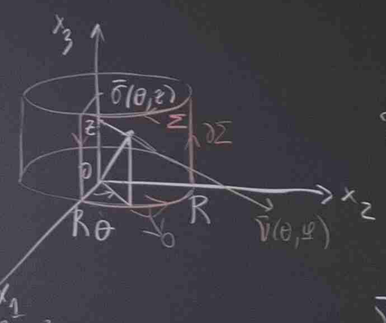
ii) le bord de Σ est :

$$\partial\Sigma = \vec{\sigma}(\partial A)$$

le sens de de parcours de $\partial\Sigma$ est obtenu en parcourant ∂A dans le sens positif

Ex : 1/4 cylindre





$$\vec{\sigma}(\theta,z) = (R\cos\theta, R\sin\theta, z)$$

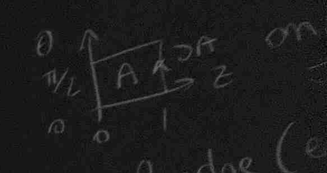
$$\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial z} = \begin{pmatrix} -R\sin\theta \\ R\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$$

$$\vec{\nu}(\theta,z) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

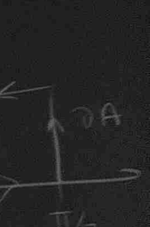
$$\Sigma = \{(x_1,x_2,x_3) ; x_1^2 + x_2^2 = R^2 ; 0 \leq x_3 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

Remarque

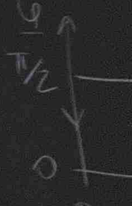


Ex : cylindre (ce
n'est p

Ex : monceau

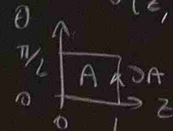


Ex : 1/2



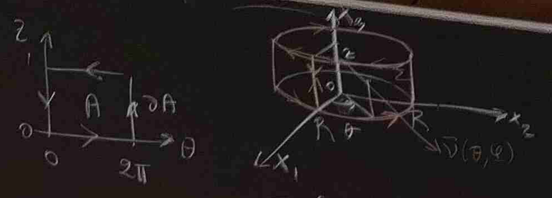
Remarque : si on choisit

$\vec{\sigma}(z,\theta) = (R\cos\theta, R\sin\theta, z)$



on obtient $\vec{\nu}(z,\theta) = (-\cos\theta, -\sin\theta, 0)$

Ex : cylindre (en entier) n'est pas une surface régulière



$\Sigma = \{(x_1,x_2,x_3)\ ;\ x_1^2+x_2^2=R^2,\ 0\le x_3\le 1\}$

$\vec{\sigma}(\theta,z) =$ idem

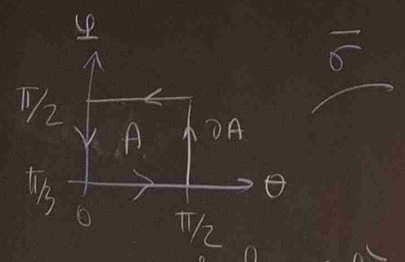
$\vec{\sigma} : A \to \Sigma$ n'est pas bijectif car $\vec{\sigma}(0,z) = \vec{\sigma}(2\pi,z)$

$\partial\Sigma$? $\partial\Sigma = \vec{\sigma}(\partial A)$ on supprime les points et les courbes comptées 2 fois dans deux sens opposés

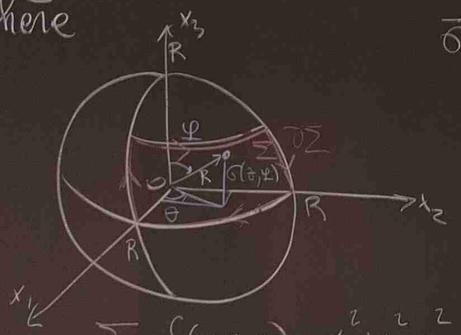
$\partial\Sigma$ cercle $x_1^2+x_2^2=R^2$ $x_3=0$ ∪ $x_3=1$ orientés dans deux sens opposés

---

Ex : morceau de sphère



$\vec{\sigma}$



surface régulière

$\Sigma = \{(x_1,x_2,x_3)\ ;\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=R^2,\ x_1\ge 0, x_2\ge 0,\ 0\le x_3\le R/2\}$

$\vec{\sigma}(\theta,\varphi) = (R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi)$

$\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\sin\theta \\ R\sin\varphi\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\theta \\ -R\cos\varphi\sin\theta \\ -R\sin\varphi \end{pmatrix}$

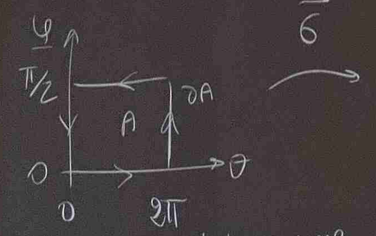
$= \left(-R^2\sin^2\varphi\cos\theta, -R^2\sin^2\varphi\sin\theta, -R^2\sin\varphi\cos\varphi\right) = -R\sin\varphi\ \vec{\sigma}(\theta,\varphi)$

$\vec{\nu}$ va vers l'origine

Si on permute l'ordre des param : $\vec{\sigma}(\varphi,\theta) =$ idem

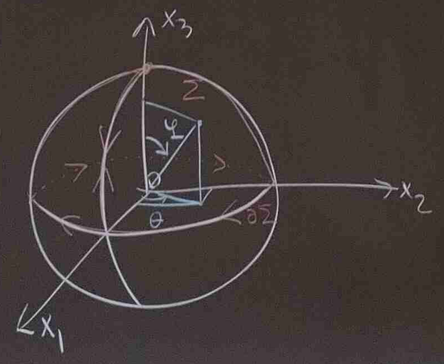
la normale $\vec{\nu}$ va vers l'ext de la sphère

Ex : 1/2 sphère $\Sigma = \{(x_1,x_2,x_3)\ ;\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=R^2,\ x_3\ge 0\}$



$\vec{\sigma}$

n'est pas une surface régulière



$\partial\Sigma = \vec{\sigma}(\partial A)$

= pôle nord $\{(x_1,x_2,x_3)\ ,\ x_1=0, x_2=0, x_3=R\}$

∪ méridien Greenwich parcouru deux fois en sens inverse

∪ cercle sur eq $\{(x_1,x_2,x_3)\ ;\ x_1^2+x_2^2=R^2,\ x_3=0\}$

On supprime les points et les arêtes parcourues 2 x en sens inverse

On obtient

$\partial\Sigma$: cercle rayon R sur l'eq, parcouru comme indiqué.

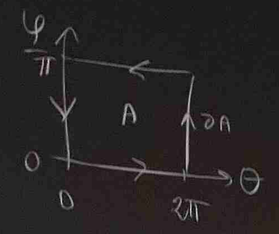
$x_3 = 0$

$x_3 = 1$

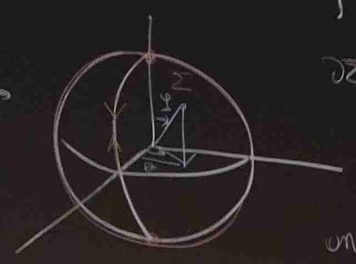
deux sens opposés

} règle

Sphère entière $\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \; ; \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\}$



$\vec{\sigma}$



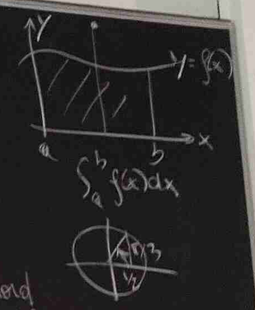
$\partial\Sigma$ = pôle nord

∪ pôle nord → pôle sud

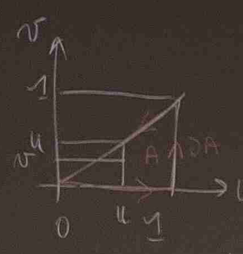
∪ pôle sud

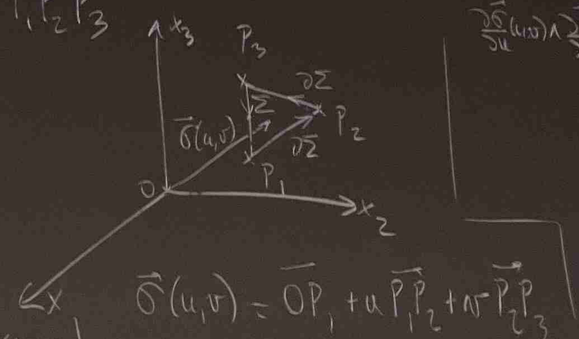
∪ pôle sud → pôle nord

on supprime les points et les courbes parcourues 2x en sens inverse et obtient $\partial\Sigma = \emptyset$



Ex: triangle sommets $P_1 P_2 P_3$





$\vec{\sigma}(u,v) = \overrightarrow{OP_1} + u\overrightarrow{P_1P_2} + v\overrightarrow{P_2P_3}$

$\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v}(u,v) = \overrightarrow{P_1P_2} \wedge \overrightarrow{P_2P_3}$

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière de param $\vec{\sigma} : \bar{A} \to \Sigma$

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$

Soit $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^0$ on définit

$$\iint_\Sigma f \, ds = \iint_A du\,dv \left(f(\vec{\sigma}(u,v)) \left\| \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v}(u,v) \right\| \right)$$

(Si $f = 1$) $\iint_\Sigma ds = \text{Aire}(\Sigma)$

$$\iint_\Sigma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_A du\,dv \left(\vec{F}(\vec{\sigma}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v}(u,v) \right) \right)$$

(aussi $\iint_\Sigma \vec{F} \cdot \vec{\nu} \, ds$)



Ex: sphère centrée O rayon R (pas une surface régulière mais...)

$$\Sigma = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 ;\ x_1^2+x_2^2+x_3^2 = R^2\}$$

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2+x_2^2+x_3^2$$

$$\vec{\sigma}(\theta,\varphi) = (\quad)$$

$$\left\| \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \varphi} \right\| = R^2 \sin\varphi \text{ (à vérifier)}$$

$$\iint_\Sigma f\, ds = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi\ f(\vec{\sigma}(\theta,\varphi)) \left\| \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \varphi} \right\|$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi\ R^2 R^2 \sin\varphi$$

$$= 2\pi R^4 \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi = 4\pi R^4$$

Chap 5. Intégrales surfaces

- Σ surface régulière par morceaux
-

$\vec{\sigma} : A \to \Sigma$ bijective $\mathcal{C}^1$

$\vec{v}(u,v) = \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}(u,v)$

$\partial\Sigma = \vec{\sigma}(\partial A)$

$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} \neq 0$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x_1,x_2,x_3) \to f(x_1,x_2,x_3)$

$$\iint_\Sigma f\,ds = \iint_A f(\vec{\sigma}(u,v)) \left\| \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} \right\| du\,dv$$

$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\iint_\Sigma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{F}(\vec{\sigma}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}(u,v) \right) du\,dv$$

Surface régulière par morceaux (def 8.3 Lima)

"réunion de surfaces régulières, disjointes 2 à 2"

$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots \cup \Sigma_m$

Σ_i surface régulière

$$\iint_\Sigma f\,ds = \sum_{i=1}^{m} \iint_{\Sigma_i} f\,ds$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ par morceaux

la param $\vec{\sigma} : A \to \Sigma$ (bijective) $\mathcal{C}^1$ par morceaux

la normale $\vec{v}(u,v) = \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}(u,v)$ est continue par morceaux

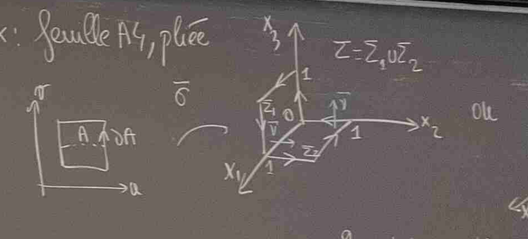
orientée

$\partial\Sigma = \vec{\sigma}(\partial A)$

l'orientation est celle obtenue en parcourant ∂A sens positif

règle : on élimine les points et les courbes parcourues 2x en sens inverse

Ex : feuille A4, pliée



2 orientations possibles

Σ_1 : paramétrisation $\vec{\sigma}(u,v) = (u,0,v)$ $0 \le u,v \le 1$ (1)

$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = (0,-1,0)$

$A =]0,1[\times]0,1[$

ou alors $\vec{\sigma}(u,v) = (v,0,u)$ $0 \le u,v \le 1$

$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}(u,v) = (0,1,0)$ (2)

Σ_2 : param $\vec{\sigma}(u,v) = (u,v,0)$ $0 \le u,v \le 1$ (3)

$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = (0,0,1)$

ou alors $\vec{\sigma}(u,v) = (v,u,0)$ (4)

$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} = (0,0,-1)$

Figure de gauche ↑ — droite → — param (2) et (3) — (1) et (4)

$\vec{F}(x_1,x_2,x_3) = (1,1,1)$

$$\iint_\Sigma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_\Sigma \vec{F} \cdot \vec{v}\,ds = \iint_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot \vec{v}\,ds + \iint_{\Sigma_2} \vec{F} \cdot \vec{v}\,ds$$

(2) et (3)

$= \text{Aire}(\Sigma_1) \cdot (1,1,1) \cdot (0,1,0) + \text{Aire}(\Sigma_2) \cdot (1,1,1) \cdot (0,0,1)$

$= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2$

(1) et (4)

$= -1 \cdot 1 \cdot 1 + -1 \cdot 1 \cdot 1 = -2$

(2) et (4) $= 0$ (1) et (3) } interdit

$\vec{\sigma}(u,v) = (v,0,u) \quad 0 \le u,v \le 1$

$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}(u,v) = (0,1,0)$ (2)

ou alors $\vec{\sigma}(u,v) = (v,u,0)$ (4)

$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} = (0,0,-1)$

$\vec{F}(x_1,x_2,x_3) = (1,1,1)$

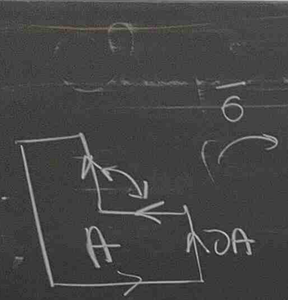
$\iint_\Sigma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{v}\, ds = \iint_{\Sigma_1} \vec{F}\cdot\vec{v}\, ds + \iint_{\Sigma_2} \vec{F}\cdot\vec{v}\, ds$

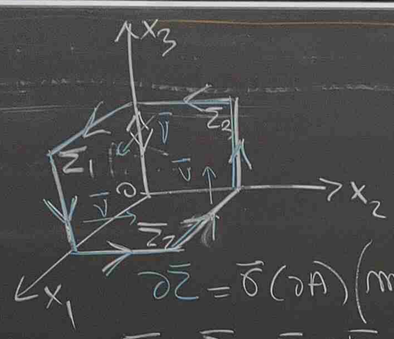
$+ \iint_{\Sigma_3} (1,1,1)\cdot(0,0,1)$

$= 1 \cdot 1 = 2$

(1) et (4) $-1 \cdot -1 = -2$

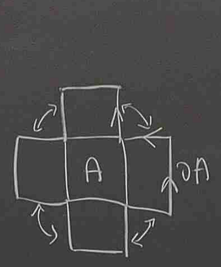
(2) et (4) 0 (3) et (4) } interdit

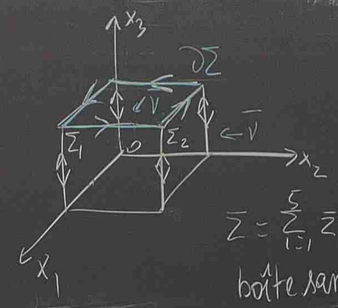




$\partial\Sigma = \vec{\sigma}(\partial A)$ (mains arrête)

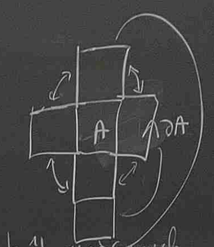
$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$



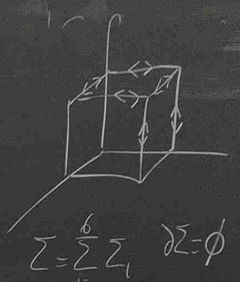


$\Sigma = \sum_{i=1}^{5} \Sigma_i$

boîte sans couvercle



boîte avec couvercle



$\Sigma = \sum_{i=1}^{6} \Sigma_i \quad \partial\Sigma = \emptyset$

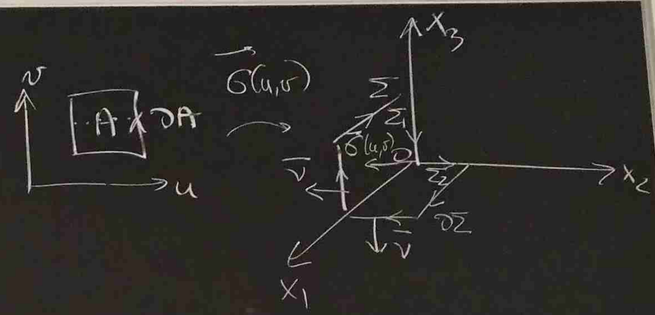
Chap 5 : surface

dernière précision

Σ est une surface régulière par morceaux s'il existe A un domaine de $\mathbb{R}^2$ et une param. $\vec{\sigma} : \bar{A} \to \Sigma$ $\mathcal{C}^1$ par morceaux

$\vec{\nu}(u,v) = \dfrac{\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}(u,v)}{\left\| \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}(u,v) \right\|}$

$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots \cup \Sigma_m$ / Σ_i est une surface régulière



$\partial\Sigma = \vec{\sigma}(\partial A)$

(ex. on supprime les points et les arêtes parcourues 2x en sens inverse)

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$ $\iint_\Sigma f\,ds = \sum_{i=1}^{m} \iint_{\Sigma_i} f\,ds$

$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^0$ $\iint_\Sigma \vec{F}.\vec{ds} = \sum_{i=1}^{m} \iint_{\Sigma_i} \vec{F}.\vec{ds}$

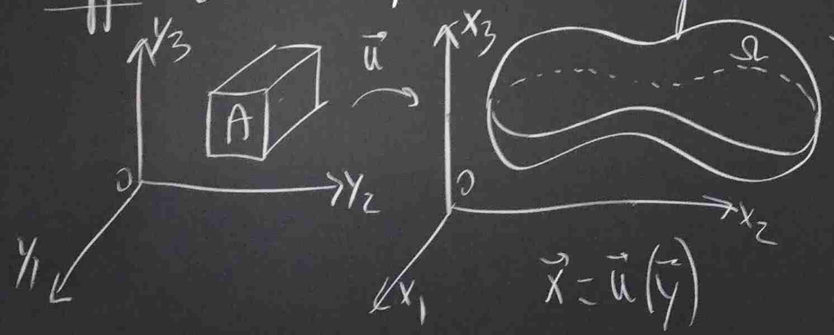
En pratique on n'exhibe pas $\vec{\sigma} : \bar{A} \to \Sigma$

On paramétrise chaque surface Σ_i séparement

On calcule $\iint_{\Sigma_i} \vec{F}.\vec{ds}$ et on fait attention à l'orientation

Chap 6 : théorème de la divergence

Rappel : (8.5 time) calcul d'intégrales dans $\mathbb{R}^3$



$\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$

$\vec{x} \to f(\vec{x})$

$(x_1, x_2, x_3) \to f(x_1, x_2, x_3)$

$\iiint_\Omega f\,dx_1\,dx_2\,dx_3$

$\vec{u} : A \longrightarrow \Omega$ $\mathcal{C}^1$
$\vec{y} \longmapsto \vec{x} = \vec{u}(\vec{y})$
(y_1, y_2, y_3)

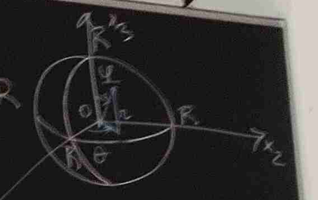
$$\begin{cases} x_1 = u_1(y_1, y_2, y_3) \\ x_2 = u_2 \\ x_3 = u_3 \end{cases}$$

$$\iiint_\Omega f(x_1 x_2 x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_A f(\vec{u}(\vec{y}))\, |\det D\vec{u}(\vec{y})|\, dy_1 dy_2 dy_3$$

$$D\vec{u}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial y_1}(\vec{y}) & \frac{\partial u_1}{\partial y_2}(\vec{y}) & \frac{\partial u_1}{\partial y_3}(\vec{y}) \\ \times & \cdot & \cdot \\ \times & \cdot & \frac{\partial u_3}{\partial y_3}(\vec{y}) \end{pmatrix}$$

$$\left(D\vec{u}(\vec{y})\right)_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial y_j}(\vec{y}) \qquad i,j = 1,2,3$$

Ex boule centre 0 rayon R



$0 \le r \le R$
$0 \le \theta \le 2\pi$
$0 \le \varphi \le \pi$

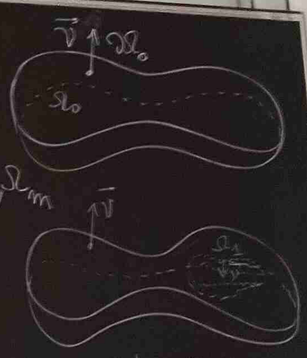
$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta\sin\varphi = u_1(r,\theta,\varphi) \\ x_2 = r\sin\theta\sin\varphi = u_2(r,\theta,\varphi) \\ x_3 = r\cos\varphi = u_3(r,\theta,\varphi) \end{cases}$$

$|\det D\vec{u}(r,\theta,\varphi)| = r^2 \sin\varphi$

$$\text{Volume}(\Omega) = \iiint_\Omega dx_1 dx_2 dx_3 = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi\, (r^2 \sin\varphi)$$

$$= \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin\varphi = \frac{R^3}{3} 2\pi 2$$

Def 6.1 (ligne) : Ω est un domaine régulier de $\mathbb{R}^3$ s'il existe des ouverts bornés de $\mathbb{R}^3$ $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ tels que $\Omega = \Omega_0 \setminus (\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 \cup \dots \cup \overline{\Omega}_m)$



$\overline{\Omega} \subset \Omega_0$
$\overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j = \emptyset$ $\quad i = 1, \dots, m$
$\partial\Omega_j$ $\quad j = 0, 1, \dots, m$ surface régulière par morceaux de bord $\partial\Omega = \bigcup_j \partial\Omega_j = \emptyset$ (surface fermée)

$\partial\Omega = \partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_1 \cup \dots \partial\Omega_m$
il existe un champ de normale extérieur (unité) continue par morceaux

Lemme : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$
Ω domaine régulier de $\mathbb{R}^3$

$$\iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1 x_2 x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} f \nu_i\, ds \qquad i = 1,2,3$$

Thm 6.2 (ligne) : thm de la divergence (corollaire du lemme)
Ω domaine régulier de $\mathbb{R}^3$
$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^1$

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{F}\, dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu}\, ds$$

$$\left(= \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{s} \right)$$

Dem de 6.2 à partir du lemme

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{F}\,dx_1dx_2dx_3 = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_2}{\partial x_2}+\frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right)dx_1dx_2dx_3 = \iint_{\partial\Omega}\left(F_1\nu_1+F_2\nu_2+F_3\nu_3\right)ds = \iint_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot\vec{\nu}\,ds$$

$$\left(= \iint_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot d\vec{s}\right)$$

$\vec{F}(\vec{x}) = \left(F_1(\vec{x}), F_2(\vec{x}), F_3(\vec{x})\right)$

lemme $f = F_i$, $i=1$; $f=F_i$, $i=2$; $f=F_i$, $i=3$

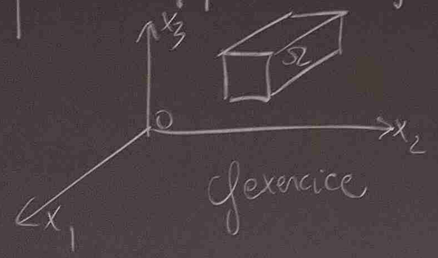
$$\iint_{\substack{\partial\Omega\\ \text{régulière}}}\vec{F}\cdot d\vec{s} \underset{\text{déf}}{=} \iint_A \vec{F}\left(\vec{\sigma}(u,v)\right)\cdot\left(\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v}(u,v)\right)du\,dv$$

$$\iint_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot\vec{\nu}\,ds = \iint_A \vec{F}(\vec{\sigma}(u,v))\cdot\vec{\nu}(u,v)\left\|\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v}(u,v)\right\|du\,dv$$

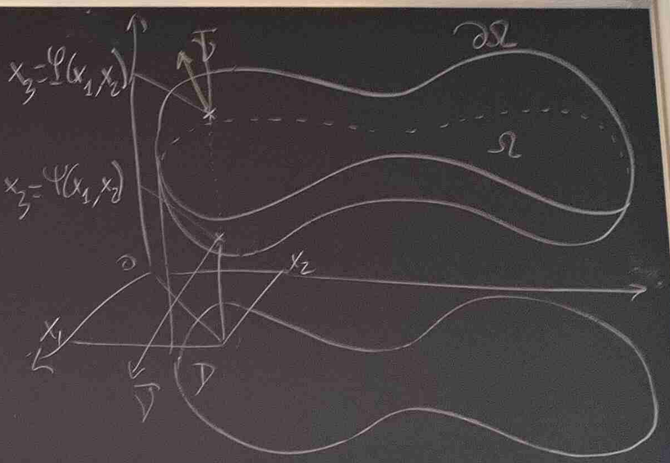
$\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v}(u,v)$

Dem lemme cas particuliers

* parallélépipède rectangle



exercice



$$\Omega = \left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R};\ (x_1,x_2)\in D \text{ et } \psi(x_1,x_2)\le x_3\le \varphi(x_1,x_2)\right\}$$

$$\iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3)\,dx_1dx_2dx_3 = \iint_D dx_1dx_2\int_{\psi(x_1,x_2)}^{\varphi(x_1,x_2)}dx_3\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3)$$

$$= \iint_D dx_1dx_2\left(f(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2)) - f(x_1,x_2,\psi(x_1,x_2))\right)$$

$$= \iint_D f(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))dx_1dx_2 - \iint_D f(x_1,x_2,\psi(x_1,x_2))dx_1dx_2$$

Calculons $\iint_{\partial\Omega} f\nu_3 \, ds$

$\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

$\Sigma_1 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 ; (x_1,x_2) \in D, x_3 = \Psi(x_1,x_2)\}$

$\Sigma_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 ; (x_1,x_2) \in D, x_3 = \Psi(x_1,x_2)\}$

$\vec{\nu}$ de Σ_1 vers le haut, $\vec{\nu}$ de Σ_2 vers le bas

" "

param de Σ_1 : $(x_1,x_2) \in D$
$(u,v) \in D$

$\vec{\sigma}(x_1,x_2) = (x_1, x_2, \Psi(x_1,x_2))$

$\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial x_1}(x_1,x_2) \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial\Psi}{\partial x_1} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial\Psi}{\partial x_2} \end{pmatrix}$

$= \left(-\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}(x_1,x_2), -\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}(x_1,x_2), 1\right)$

$\vec{\nu} = \dfrac{\left(-\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}, -\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}, 1\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\right)^2}}$ $\quad \nu_3 = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\right)^2}}$ vers le haut

$\iint_{\Sigma_1} f\nu_3 \, ds = \iint_D dx_1 dx_2 \left(f(x_1,x_2,\Psi(x_1,x_2)) \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\right)^2}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\right)^2} \right)$

$= \iint_D f(x_1,x_2,\Psi(x_1,x_2)) \, dx_1 dx_2$

Σ_1

idem pour $\Sigma_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 ; (x_1,x_2) \in D, x_3 = \Psi(x_1,x_2)\}$

param de Σ_2 : $\vec{\sigma}(x_1,x_2) = (x_1, x_2, \Psi(x_1,x_2))$ $\quad \left(\vec{\sigma}(x_1,x_2) = (x_2, x_1, \Psi(x_2,x_1))\right.$

mais attention, la normale va vers le haut

on fait le calcul et on change de signe à la fin

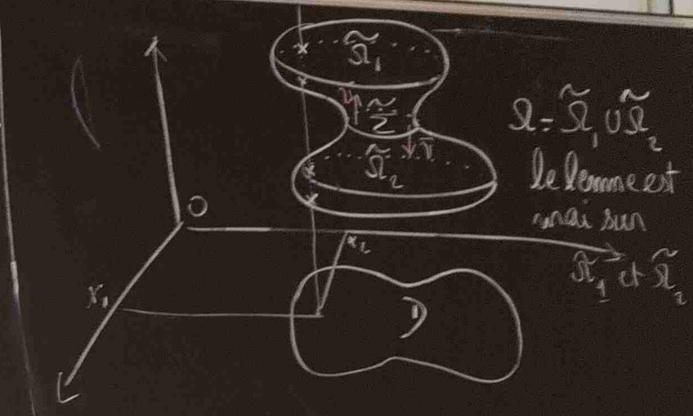
on trouve : $\iint_{\Sigma_2} f\nu_3 \, ds = -\iint_D f(x_1,x_2,\Psi(x_1,x_2)) \, dx_1 dx_2$

$= u_2(r,\theta,\varphi)$

$x_3 = r\cos\varphi$

Conclusion : $\iint_{\partial\Omega} f v_3 \, ds = \iint_D f(x_1, x_2, \varphi(x_1,x_2)) \, dx_1 dx_2 - \iint_D f(x_1, x_2, \psi(x_1,x_2)) \, dx_1 dx_2$

$= \iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_3} \, dx_1 dx_2 dx_3$



$dx_j \quad j = 1, 2, \dots, m$

(formule) ;

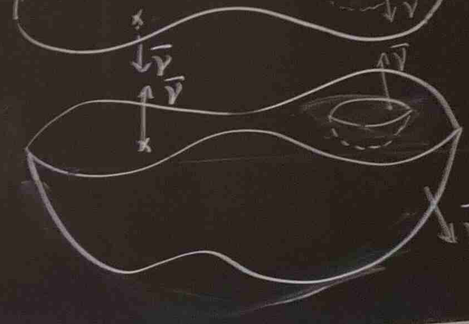
$\iiint_{\tilde{\Omega}_1} \frac{\partial f}{\partial x_3} \, dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\tilde{\Omega}_1} f v_3 \, ds$

$\iiint_{\tilde{\Omega}_2} \frac{\partial f}{\partial x_3} \, dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\tilde{\Omega}_2} f v_3 \, ds$

on somme

$\iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_3} \, dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} f v_3 \, ds$ ($\iint_{\tilde{\Sigma}} f v_3 \, ds$ intervient 2 fois avec v_3 signe oppsé)

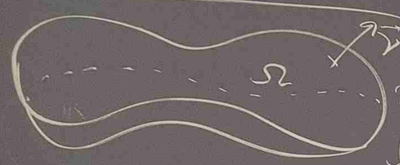
$\Omega = \Omega_0 \setminus \tilde{\Omega}_1$ (1 seul trou) on coupe plan horizontal



volume sans trou
lemme est vrai

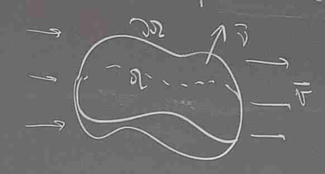
lemme vrai
on somme les 2 formules

Chap 6 : thm divergence



Ω domaine régulier
$\partial\Omega$ bord, $\vec{\nu}$ norm. ext unité
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ $\iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} f \nu_i ds$
$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^1$ $\iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{v} dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} \vec{v}.\vec{\nu} ds$

Eq. d'Euler et paradoxe d'Alembert (v1750)



$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^1$
$\vec{x} \to \vec{v}(\vec{x}) = (v_1(\vec{x}), v_2(\vec{x}), v_3(\vec{x}))$
$p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$
$\vec{x} \to p(\vec{x})$
Sat $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ domaine régulier quelconque

On a (ici $\rho > 0$ masse vol. kg/m³, $\vec{g}$ gravité $\in \mathbb{R}^3$) :

$$\iint_{\partial\Omega} \rho \vec{v} (\vec{v}.\vec{\nu}) ds + \iint_{\partial\Omega} p \vec{\nu} ds = \iiint_\Omega \rho \vec{g} dx_1 dx_2 dx_3$$

forces dues à la quantité de mouvement | forces dues à la pression | force vol.

(1)

unité de $\rho \vec{v} (\vec{v}.\vec{\nu})$: $\frac{kg}{m^3} \frac{m^2}{s^2}$

——— $p \vec{\nu}$: $\frac{N}{m^2} = \frac{kg\,m}{s^2 m^2}$

i.e. $i = 1,2,3$: $\iint_{\partial\Omega} \rho v_i (\vec{v}.\vec{\nu}) ds + \iint_{\partial\Omega} p \nu_i ds = \iiint_\Omega \rho g_i dx_1 dx_2 dx_3$

"Conservation de qté de mvt"

Eq. cons de la masse : $\iint_{\partial\Omega} \vec{v}.\vec{\nu} ds = 0$

On va montrer que $\vec{v}$ et p satisfont les eq. d'Euler : $\begin{cases} \rho(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} + \vec{\nabla} p = \rho \vec{g} \text{ dans } \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0 \end{cases}$

fluide incompressible, viscosité nulle

$\begin{cases} \text{i.e. } i = 1,2,3 \quad \rho(\vec{v}.\vec{\nabla}) v_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho g_i \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0 \end{cases}$

avec $\vec{v}.\vec{\nabla} = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$

4 eq. 4 inconnues v_1, v_2, v_3, p

En effet $\iint_{\partial\Omega} p \nu_i ds = \iiint_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_1 dx_2 dx_3$

On a aussi $\iint_{\partial\Omega} \rho v_i (\vec{v}.\vec{\nu}) ds = \iint_{\partial\Omega} \rho v_i \vec{v}.\vec{\nu} ds$

$= \rho \iiint_\Omega \operatorname{div}(v_i \vec{v}) dx_1 dx_2 dx_3$

$= \rho \iiint_\Omega \left(v_i \operatorname{div} \vec{v} + (\vec{v}.\vec{\nabla}) v_i \right) dx_1 dx_2 dx_3$

D'autre part puisque $0 = \iint_{\partial\Omega} \vec{v}.\vec{\nu} ds = \iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{v} dx_1 dx_2 dx_3$

ceci étant vrai pour tout Ω, on en déduit $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ dans $\mathbb{R}^3$

par conséquent

$\iint_{\partial\Omega} \rho v_i (\vec{v}.\vec{\nu}) ds = \iiint_\Omega \rho (\vec{v}.\vec{\nabla}) v_i dx_1 dx_2 dx_3$

Finalement

$\iiint_\Omega \left(\rho(\vec{v}.\vec{\nabla}) v_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho g_i \right) dx_1 dx_2 dx_3 = 0$

quel que soit Ω

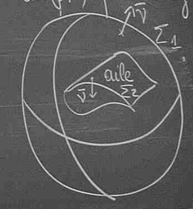
et donc $\begin{cases} (2) \quad \rho(\vec{v}.\vec{\nabla}) v_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho g_i = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \; i = 1,2,3 \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0 \end{cases}$

Soit $\vec{v}, p$ qui satisfont (1) pour tout Ω et donc (2), on choisit un Ω particulier

Ω = grande boule \ aile

$\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ = sphère ∪ bord aile

$\operatorname{div}(f\vec{F}) = f \operatorname{div} \vec{F} + \vec{F}.\vec{\nabla} f$



$= \rho \iiint_{\Omega} \left(v_i \operatorname{div} \vec{v} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla}) v_i \right) dx_1 dx_2 dx_3$

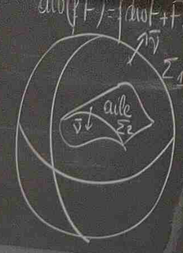
ceci étant vrai pour tout Ω, on en déduit $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ dans $\mathbb{R}^3$

Finalement $\iiint_{\Omega} \left(\rho (\vec{v}\cdot\vec{\nabla}) v_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho g_i \right) dx_1 dx_2 dx_3 = 0$ quel que soit Ω

Soit $\vec{v}, p$ qui satisfont (1) partout Ω et donc (2), on choisit un Ω particulier

Ω = grande boule \ aile

$\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ = sphère ∪ bord aile



On a :

$$\iint_{\Sigma_1} \rho \vec{v} (\vec{v}\cdot\vec{n}) ds + \iint_{\Sigma_2} \rho \vec{v} (\vec{v}\cdot\vec{n}) ds + \iint_{\Sigma_1} p \vec{n} ds + \iint_{\Sigma_2} p \vec{n} ds = \vec{0} \quad \text{(pas de } \vec{g}\text{)}$$

Supp que grande boule soit suff grande de sorte que $\vec{v} = \vec{V}$ $\vec{V} \in \mathbb{R}^3$ constante

$p = P$ $P \in \mathbb{R}$ sur Σ_1

dans ce cas

$\iint_{\Sigma_1} \rho v_i (\vec{v}\cdot\vec{n}) ds = \iint_{\Sigma_1} \rho V_i (\vec{V}\cdot\vec{n}) ds$

$= \iiint_{\text{grande boule}} \rho \underbrace{\operatorname{div}(V_i \vec{V})}_{0} dx_1 dx_2 dx_3 = 0$

idem $\iint_{\Sigma_1} p \vec{n} ds = \iint_{\Sigma_1} P \vec{n} ds$

$= -\iiint_{\text{grande boule}} \frac{\partial P}{\partial x_i} dx_1 dx_2 dx_3$ ocan $P = \text{cste}$

et donc $\iint_{\Sigma_2} (\rho \vec{v} (\vec{v}\cdot\vec{n}) + p\vec{n}) ds = \vec{0}$

Σ_2 = 0 sur l'aile

(l'air ne rentre pas d'aile)

Finalement $\iint_{\Sigma_2} p \vec{n} ds = \vec{0}$: l'aile ne porte pas

Il manque quelque chose

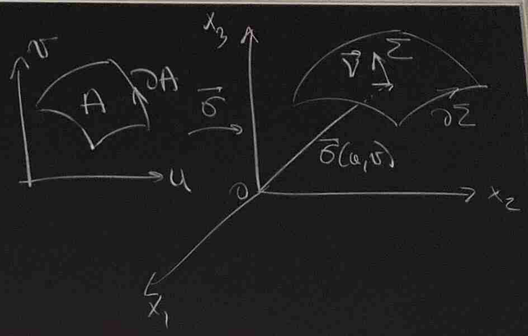
Navier (1850)

imaginate $\mu \Delta \vec{u}$ dans le cas d'Euler

B

Chap 7. Thm de Stokes

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ surface régulière par morceaux, orientable de bord $\partial\Sigma$ ($\partial\Sigma = \vec{\sigma}(\partial A)$ orientation obtenue en parcourant ∂A dans le sens positif)

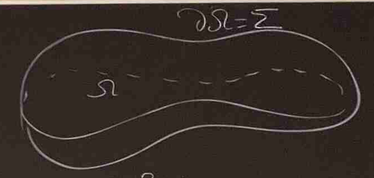


Soit $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$

$\vec{x} \longrightarrow \vec{F}(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), F_2(\vec{x}), F_3(\vec{x}))$

On a $\iint_\Sigma \vec{rot}\,\vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{l}$

Corollaire : si Σ est une surface fermée ($\partial\Sigma = \emptyset$) alors $\iint_\Sigma \vec{rot}\,\vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$

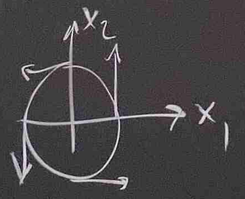


$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ domaine
$\partial\Omega = \Sigma$ surface fermée

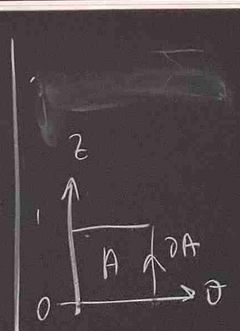
Ex de calcul :

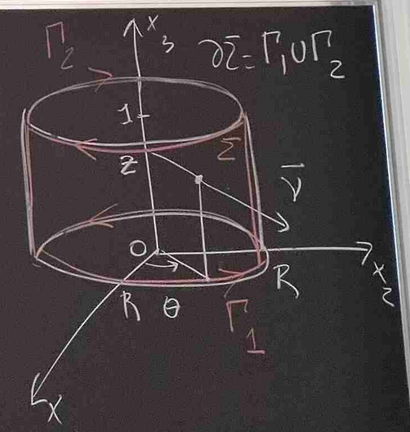
$\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ;\ x_1^2 + x_2^2 = R^2,\ 0 \le x_3 \le 1\}$

$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, x_1, 0)$



Vérifier thm Stokes





param Σ $\vec{\sigma}(\theta, z) = (R\cos\theta, R\sin\theta, z)$

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial z} = \begin{pmatrix} -R\sin\theta \\ R\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$$

$$\vec{v}(r,z) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

$$\vec{rot}\,\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0,0,2)$$

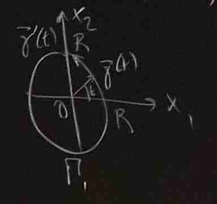
$$\iint_\Sigma \vec{rot}\,\vec{F}.d\vec{s} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dz\ \vec{rot}\,\vec{F}(\vec{\sigma}(\theta,z)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial z}\right)(r,\theta)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dz\ \underbrace{(0,0,2) \cdot (R\cos\theta, R\sin\theta, 0)}_{0}$$

$$= 0$$

param de Γ_1 : $\vec{\gamma}(t) = (R\cos t, R\sin t, 0)$, $0 \le t \le 2\pi$

$\vec{\gamma}'(t) = (-R\sin t, R\cos t, 0)$



$$\int_{\Gamma_1} \vec{F}.d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} dt\ \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} dt\ (-R\sin t, R\cos t, 0) \cdot (-R\sin t, R\cos t, 0)$$

$$= \int_0^{2\pi} dt\ R^2 = 2\pi R^2$$

Puisque Γ_2 est orientée dans le sens opposé à Γ_1, on trouve $\int_{\Gamma_2} \vec{F}.d\vec{\ell} = -2\pi R^2$

Cond: $\int_{\partial\Sigma} \vec{F}.d\vec{\ell} = \int_{\Gamma_1} \vec{F}.d\vec{\ell} + \int_{\Gamma_2} \vec{F}.d\vec{\ell}$

$= 2\pi R^2 - 2\pi R^2$

$= 0$

$= \iint_\Sigma \vec{rot}\,\vec{F}.d\vec{s}$

Soit $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup$ fond du cylindre

$= \Sigma \cup \underbrace{\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1^2 + x_2^2 \le R^2,\ x_3 = 0\}}_{\hat{\Sigma}}$

$\iint_{\tilde{\Sigma}} \vec{rot}\,\vec{F}.d\vec{s}$? param de $\hat{\Sigma}$: $\vec{\sigma}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$

$0 \le r \le R \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = (0,0,r)$$ vers le haut

mauvaise orientation

de la normale, on change le signe de $\iint_{\hat{\Sigma}} \vec{rot}\,\vec{F}.d\vec{s}$

à la fin du calcul

$$\iint_{\hat{\Sigma}} \vec{rot}\,\vec{F}.d\vec{s} = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta\ (0,0,2).(0,0,r)$$

$$= \int_0^R 2r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi R^2$$

avec la "bonne" orientation

$\iint_{\hat{\Sigma}} \vec{rot}\,\vec{F}.d\vec{s} = -2\pi R^2$

$\iint_{\tilde{\Sigma}} \vec{rot}\,\vec{F}.d\vec{s}$

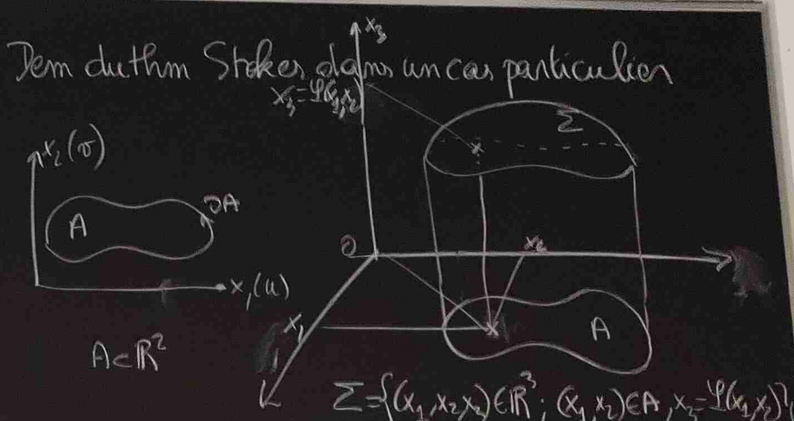
$= \iint_\Sigma + \iint_{\hat{\Sigma}} = 0 - 2\pi R^2$

Calculons $\int_{\partial\tilde{\Sigma}} \vec{F}.d\vec{\ell}$

$\partial\tilde{\Sigma} = \Gamma_2$ (Γ_1 ne fait plus partie du bord)

$\int_{\partial\tilde{\Sigma}} \vec{F}.d\vec{\ell} = \int_{\Gamma_2} \vec{F}.d\vec{\ell} = -2\pi R^2 = \iint_{\tilde{\Sigma}} \vec{rot}\vec{F}.d\vec{s}$

Dem du thm Stokes dans un cas particulier



$\vec{F}(x_1,x_2,x_3) = (F_1(x_1,x_2), F_2(x_1,x_2), 0)$

On va dém $\iint_\Sigma \vec{rot}\vec{F}.d\vec{s} = \int_{\partial\Sigma} \vec{F}.d\vec{\ell}$

$\vec{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)$

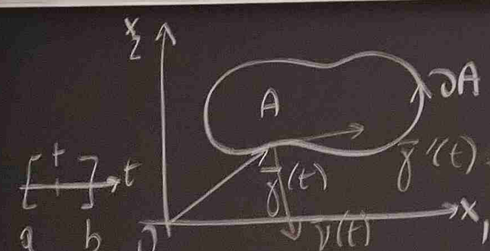
param. de Σ : $\vec{\sigma}(x_1,x_2) = (x_1, x_2, \varphi(x_1,x_2))$

$(x_1,x_2) \in A$

$\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial\varphi/\partial x_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial\varphi/\partial x_2 \end{pmatrix} = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, 1\right)$

$\iint_\Sigma \vec{rot}\vec{F}.d\vec{s} = \iint_A dx_1 dx_2 \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)$

lemme chap 4 $= \int_{\partial A} (F_2 \nu_1 - F_1 \nu_2)\, d\ell$



param de ∂A : $\vec{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$

tangente $\vec{\gamma}'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))$

normale ext $\vec{\nu}(t) = \frac{(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))}{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}}$

$= \int_a^b dt \left(\frac{F_2(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\,\gamma_2'(t)}{\sqrt{(\gamma_1')^2+(\gamma_2')^2}} - \frac{F_1(\gamma_1(t),\gamma_2(t))(-\gamma_1'(t))}{\sqrt{(\gamma_1')^2+(\gamma_2')^2}} \right) \sqrt{(\gamma_1')^2+(\gamma_2')^2}\, dt$

$$\iint_\Sigma \vec{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_a^b dt \left(F_1(\vec{\gamma}(t))\gamma_1'(t) + F_2(\vec{\gamma}(t))\gamma_2'(t) \right)$$

— Finalement $\int_{\partial\Sigma} \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$

param $\partial\Sigma$: $\left(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \varphi(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\right)$, $a \le t \le b$

$$\int_{\partial\Sigma} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \int_a^b dt \left(F_1(\vec{\gamma}(t))\gamma_1'(t) + F_2(\vec{\gamma}(t))\gamma_2'(t) \right)$$

$$= \iint_\Sigma \vec{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

Remarques :

- Soit $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^2$, on sait que $\operatorname{div} \vec{rot}\,\vec{F} = 0$. D'autre part soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine, de bord $\partial\Omega$, normale $\vec{\nu}$ unité vers l'ext.

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{rot}\,\vec{F}\, dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} \vec{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{\nu}\, ds = \iint_{\partial\Omega} \vec{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_{\partial\partial\Omega} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = 0$$

thm div — Stokes

mais $\partial\partial\Omega = \emptyset$ car $\partial\Omega$ surface fermée

$$\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial z} = \begin{pmatrix} -R\sin\theta \\ R\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge$$

$$= \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(x,z) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \end{pmatrix}$$

$$\vec{rot}\,\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times$$

$$\int_{\Gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$$

- Soit

D'au

rap

Γ_2

- Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$, on sait que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \vec{0}$
D'autre part, soit Σ surface de $\mathbb{R}^3$, régulière par morceaux, de bord $\partial\Sigma$ orienté ....

$$\iint_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \vec{ds} = \int_{\partial\Sigma} \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \vec{dl} = f(B) - f(A) = 0$$

(Stokes ; Thm gradient forme Chap 3)

où A et B sont l'origine et l'extrémité de $\partial\Sigma$. Mais $\partial\Sigma$ est une courbe fermée donc $A = B$

20 30 3 53/148

A ∂A $\vec{\sigma}$ $\vec{\sigma}(u,v)$ $\vec{\nu}$ $\partial\Sigma$ Σ

$\vec{v} = \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v}$ $\partial\Sigma = \vec{\sigma}(\partial A)$

$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^1$

$\iint_\Sigma \vec{rot}\,\vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$

Application : loi d'Ampère

fil densité de courant $\vec{j}$ (A/m^2) $\vec{j}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^0$

Σ : surface imaginaire

$\vec{H}$ champ magnétique (A/m) créé par $\vec{j}$ $\vec{H}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^1$

On admettra

$\int_{\partial\Sigma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \iint_\Sigma \vec{j} \cdot d\vec{s}$ (A)

Thm Stokes $\iint_\Sigma \vec{rot}\,\vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_\Sigma \vec{j} \cdot d\vec{s}$

Puisque Σ est quelconque $\vec{rot}\,\vec{H} = \vec{j}$

Fil infiniment long, section petite selon Ox_3

x_3 $\vec{j}$ x_2 x_1 fil

Soit j le courant total à travers le fil

$\vec{H}(x_1, x_2, x_3)$?

Γ cercle centre O rayon $\sqrt{x_1^2+x_2^2}$

$\vec{H}(x_1, x_2, x_3) = \alpha(-x_2, x_1, 0)$

α ? loi d'Ampère

$\int_\Gamma \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = j$

Param. de Γ : $0 \le t \le 2\pi$

$\vec{\gamma}(t) = \sqrt{x_1^2+x_2^2}\,(\cos t, \sin t, 0)$

$\vec{\gamma}'(t) = \sqrt{x_1^2+x_2^2}\,(-\sin t, \cos t, 0)$

$\vec{H}(\vec{\gamma}(t)) = \alpha\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,(-\sin t, \cos t, 0)$

$\int_\Gamma \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} \vec{H}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)\,dt$

$= \alpha \int_0^{2\pi} (x_1^2+x_2^2)\,dt$

$= \alpha (x_1^2+x_2^2) 2\pi \overset{\text{loi d'Ampère}}{=} j$

Donc $\vec{H}(x_1, x_2, x_3) = \frac{j}{2\pi(x_1^2+x_2^2)}(-x_2, x_1, 0)$

loi de Faraday : induction

$\vec{B}, \vec{E} : \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^1$

$(\vec{x}, t) \to \vec{B}(\vec{x}, t)$

$\vec{E}(\vec{x}, t)$

$\vec{B}(\vec{x}, t)$

$\partial\Sigma$ Σ $\vec{\nu}$ voltmètre

$\int_{\partial\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_\Sigma \vec{B} \cdot d\vec{s}$

Stokes

$\iint_\Sigma \vec{rot}\,\vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_\Sigma -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$

Σ est quelconque : $\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

a b x_3 A Γ $\vec{\gamma}$ $\vec{\gamma}(t)$ B x_2 x_1

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$

$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^0$

$\int_\Gamma f\,dl = \int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) \|\vec{\gamma}'(t)\|\,dt$

$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)\,dt$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ $\frac{d}{dt}\,\text{grad}\,f(\vec{\gamma}(t))$

$\int_\Gamma \text{grad}\,f \cdot d\vec{\ell} = f(B) - f(A)$

$\iint_\Sigma \vec{rot}\,\vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$

Σ surface régulière (par morceaux)

$\iint_\Sigma g\,ds = \iint du\,dv\; g(\vec{\sigma}(u,v)) \left\| \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v} \right\|$

$\iint_\Sigma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint du\,dv\; \vec{F}(\vec{\sigma}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v}(u,v) \right)$

B

Voltmètre

Σ est quelconque : $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$



$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^1$

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{F}\, dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu}\, ds \left(= \iint_{\partial\Omega} \vec{F}.d\vec{s} \right)$$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$

$$\iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} f \nu_i\, ds \quad i = 1,2,3$$

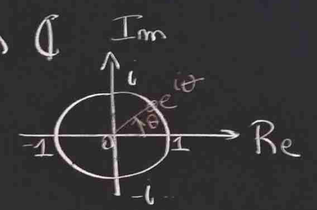
2e partie : analyse complexe

Chap 9 : fonctions holomorphes
conditions de Cauchy-Riemann

Rappel : calculs dans $\mathbb{C}$

i tel que $i^2 = -1$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$



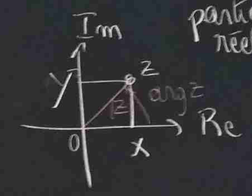
$e^{i0} = 1 = e^{i2k\pi}$ $k \in \mathbb{Z}$

$k = -1, -2, \ldots$

Soit $z \in \mathbb{C}$ $z = x + iy$

$x, y \in \mathbb{R}$ $= \mathrm{Re}\,z + i\,\mathrm{Im}\,z$

partie réelle — partie imaginaire



$z = |z| e^{i \arg z}$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

puisque $z = |z| e^{i \arg z} = |z| e^{i(\arg z + 2k\pi)}$ $k \in \mathbb{Z}$,

l'argument de z ($\arg z$) est défini à $2k\pi$ près

Ex : $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ $z_1 = x_1 + iy_1$ $z_2 = x_2 + iy_2$

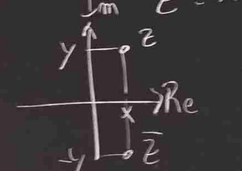
$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$

$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$

$= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(y_1 x_2 + y_2 x_1)$

$z \in \mathbb{C}$ $z = x + iy$ $x, y \in \mathbb{R}$

$\bar{z} = x - iy$



$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy)$

$= x^2 + y^2 = |z|^2$

$|z|$: module de z

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ $z_1 = |z_1| e^{i \arg z_1}$ $z_2 = |z_2| e^{i \arg z_2}$

$z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \, e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)}$

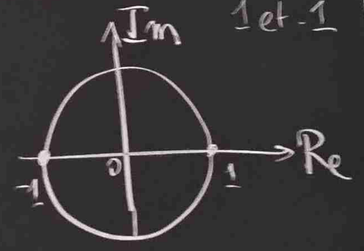
donc $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

racines n^e de 1 : on cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = 1$

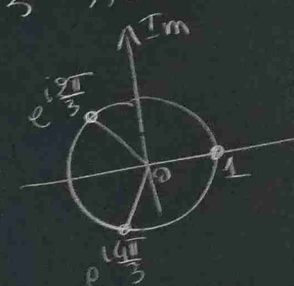
$z = |z| e^{i \arg z}$ $z^n = |z|^n e^{i n \arg z} = 1 = e^{i 2k\pi}$ $k \in \mathbb{Z}$

donc $|z|^n = 1$ ie $|z| = 1$ $\arg z = \frac{2k\pi}{n}$ $k \in \mathbb{Z}$

$n = 2$ 2 racines distinctes 1 et -1



$n = 3$ 3 racines di



$n = 4$ 4 racines

représentati

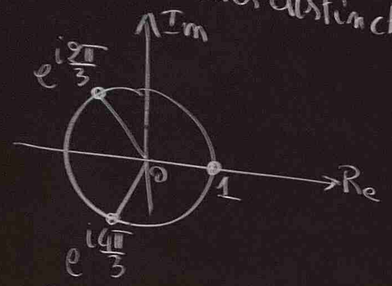


écaulem

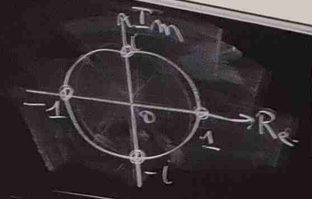
retour à

on déci

$n=3$ 3 racines distinctes



$n=4$ 4 racines distinctes



Fonctions complexes

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z = x+iy \to f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

où $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x,y) \to u(x,y)$ et $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x,y) \to v(x,y)$

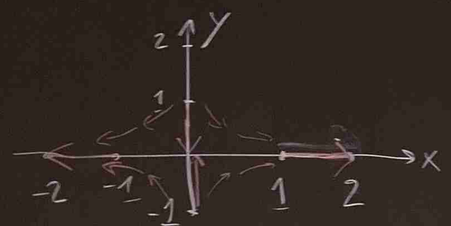
Ex: $f(z) = \bar{z} = \underbrace{x}_{u(x,y)} + i\underbrace{(-y)}_{v(x,y)}$

$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2-y^2}_{u(x,y)} + i\underbrace{2xy}_{v(x,y)}$

$f(z) = \frac{1}{z}$ $z \neq 0$ $= \frac{1}{x+iy}\,\frac{x-iy}{x-iy}$

$= \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{u(x,y)} + i\underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{v(x,y)}$

représentation du vecteur $(u(x,y), v(x,y))$



écoulement contre une plaque

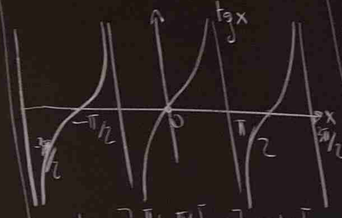
- $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$

$= \underbrace{e^x \cos y}_{u(x,y)} + i\underbrace{e^x \sin y}_{v(x,y)}$

- $f(z) = \log z$?

il faut définir $z \to \arg z$ de manière univoque

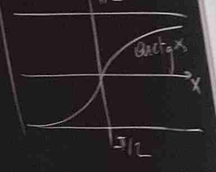
$x \to \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $x \in \mathbb{R}$



tg : $]-\pi/2, \pi/2[\to]-\infty, +\infty[$

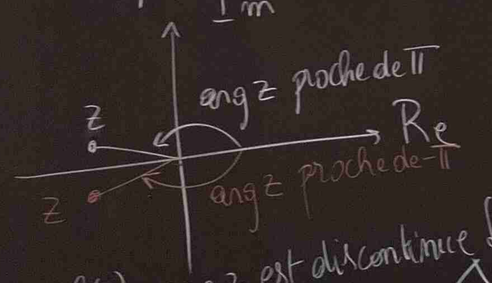
$x \to \operatorname{tg} x$ est bijective

On définit la fonction inverse Arctg : $]-\infty, +\infty[\to]-\pi/2, \pi/2[$



retour à $f(z) = \arg z$

on décide que $-\pi < \arg z \leq \pi$ $(\arg z \in \mathbb{R})$

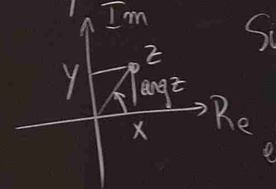


"branch cut"

$f(z) = \arg z$ est discontinue $\{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}\, z = 0,\ \mathrm{Re}\, z \leq 0\}$

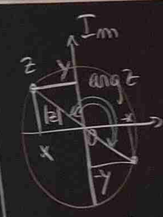
à travers la droite

Exprimons $f(z) = \arg z$ en fonction de x, y :



Si $z = x+iy$ est tq $x > 0$ $y \in \mathbb{R}$ et $-\pi/2 < \arg z < \pi/2$

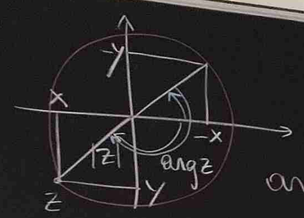
alors ce cas $\arg z = \underbrace{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}_{u(x,y)}$ $v(x,y) = 0$



si $x < 0$ et $y > 0$ $\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$

$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{-y}{-x} + \pi$

$= \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi$



Si $x<0$ et $y<0$

$\arg z = \arctan \frac{-y}{-x} - \pi$

$= \arctan \frac{y}{x} - \pi$

Si $x=0$ et $y>0$ $\quad \arg z = \pi/2$

——— $y<0$ $\quad$ ——— $= -\pi/2$

Si $x<0$ et $y=0$ $\quad$ ——— $= \pi$

On peut maintenant définir $\log z$

Soit $z \in \mathbb{C}$ $\quad z = |z| e^{i \arg z}$ avec $-\pi < \arg z \leq \pi$

$(\log(ab) = \log a + \log b \,,\ a,b>0)$

on définit $\log z = \log|z| + i \arg z$ avec $-\pi < \arg z \leq \pi$ et $z \neq 0$

$f(z) = \log z$ est discontinue à la droite $\{z \in \mathbb{C} \,;\, \mathrm{Im}\, z = 0,\ \mathrm{Re}\, z \leq 0\}$

$z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $e^{\log z} = e^{\log|z| + i \arg z}$

$= e^{\log|z|} e^{i \arg z}$

$= |z| e^{i \arg z} = z$

On n'a pas toujours $\log e^z = z$! (ex 9.13 livre)

• fonction puissance $\gamma \in \mathbb{C}$ $\quad f(z) = z^\gamma = e^{\gamma \log z}$

$= e^{\gamma(\log|z| + i \arg z)}$ $\quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

avec $-\pi < \arg z \leq \pi$

$f(z) = e^{\gamma \log|z|} e^{i\gamma \arg z}$

$= |z|^\gamma e^{i\gamma \arg z}$

$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$ on a

$z^{\gamma_1+\gamma_2} = |z|^{\gamma_1+\gamma_2} e^{i(\gamma_1+\gamma_2)\arg z}$

$= |z|^{\gamma_1} e^{i\gamma_1 \arg z} \cdot |z|^{\gamma_2} e^{i\gamma_2 \arg z}$

$= z^{\gamma_1} \cdot z^{\gamma_2}$

par contre on n'a pas toujours

$(z_1 z_2)^\gamma = z_1^\gamma z_2^\gamma$ (cf livre)

$f : O \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue en $z_0 \in O$ si

O ouvert

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tel que si $|z - z_0| < \delta$ alors $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

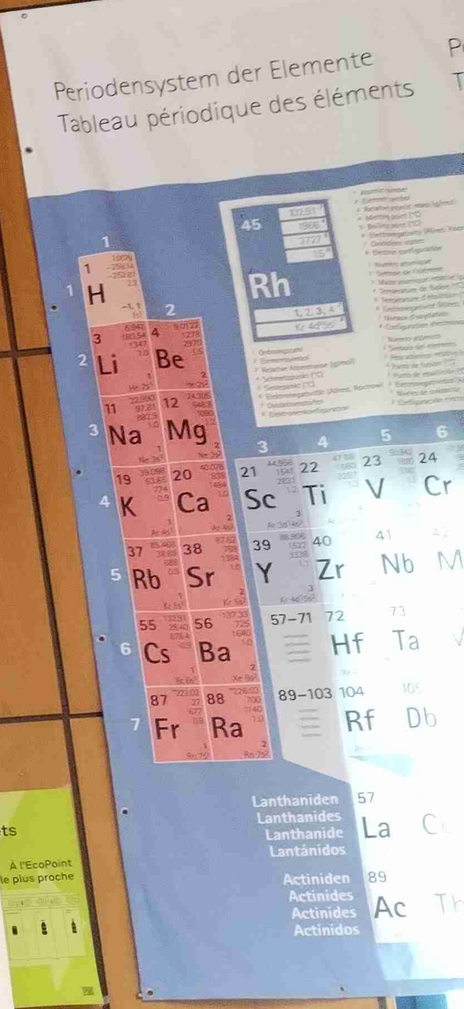
idem $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on module à la place de la valeur absolue

Si f est continue $\forall z_0 \in O$, on dit que f est continue dans O

Ex : $\bar{z}$, z^2, e^z, $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$

$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ sont continues dans $\mathbb{R}$



$\arg z$, $\log z$, z^α sont continues

dans $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}\, z = 0,\ \mathrm{Re}\, z \leq 0\}$

Remarques :

- (f continue en z_0) $\Leftrightarrow$ (u, v sont continues en (x_0, y_0)) $z_0 = x_0 + iy_0$
- Si f et g sont continues en z_0 alors $f+g$, fg, $f \circ g$ sont continues en z_0

Def pour $f+g$:

Soit $\varepsilon > 0$ $\exists \delta_1 > 0$ tq si $|z - z_0| < \delta_1$ $|f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists \delta_2$ tq si $|z - z_0| < \delta_2$ $|g(z) - g(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ alors si tq $|z - z_0| < \delta$, on a :

$|(f+g)(z) - (f+g)(z_0)| = |f(z) - f(z_0) + g(z) - g(z_0)|$

$\leq |f(z) - f(z_0)| + |g(z) - g(z_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Def 9.1 ligne

$O \subset \mathbb{C}$ ouvert $f : O \to \mathbb{C}$, $z \to f(z)$ dérivable en z_0

si $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe (la même $\forall z \to z_0$) et est finie

dans ce cas on la note $f'(z_0)$

Si f est dérivable $\forall z_0 \in O$ on dit que f est holomorphe dans O

Remarques :

- Si f est holomorphe dans O, f est continue dans O,
- les formules usuelles sont vraies $z_0 \in O$

$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$

$(fg)'(z_0) = f'(z_0) g(z_0) + f(z_0) g'(z_0)$

$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0) g(z_0) - f(z_0) g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$

$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))\, g'(z_0)$

Dem pour $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$

Hyp : f et g dérivables en z_0

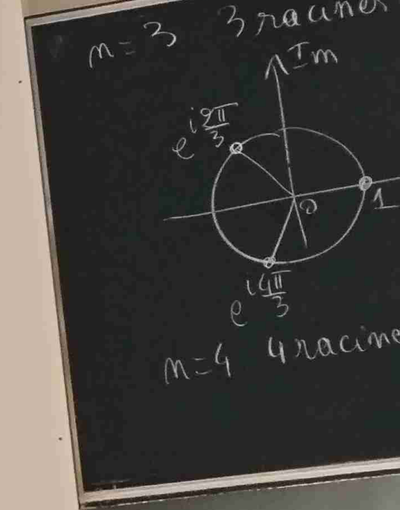
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ si $|z - z_0| < \delta$, alors $\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\left| \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} - g'(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$

Soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ si $|z - z_0| < \delta$

alors $\left| \frac{(f+g)(z) - (f+g)(z_0)}{z - z_0} - (f'(z_0) + g'(z_0)) \right|$

$= \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) + g\frac{(z) - g(z_0)}{z - z_0} - g'(z_0) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$





$$g(z) = e^z \qquad g'(z) = e^z$$

$$g(z) = \log z \qquad g'(z) = \frac{1}{z}$$

Donne la suite en commun (thm 9.2)

$$g(z) = z^2 \qquad g'(z) = 2z$$

$$g(z) = \frac{1}{z} \qquad g'(z) = -\frac{1}{z^2}$$

Chap 9. Fcts holomorphes

Cond. Cauchy-Riemann

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$z \to f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$
$z = x+iy$
$u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \to u(x,y)$

Def 9.1 :

$f: O \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ O ouvert

f holomorphe dans O si $\forall z_0 \in O$

$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in O}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe, finie, la même $\forall z \to z_0$

On la note $f'(z_0)$

Thm 9.2.

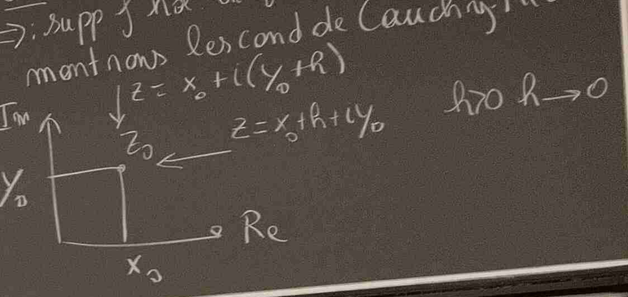
(f holomorphe dans O) $\Leftrightarrow$ ($u, v \in \mathcal{C}^1$ et $\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}_{\text{cond Cauchy-Riemann}}$)

dans ce cas $\forall z \in O$ $f'(z) \underset{z=x+iy}{=} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$

Dem.

$\Rightarrow$: supp f hol en $z_0 \in O$ et $u, v \in \mathcal{C}^1$

montrons les cond de Cauchy-Riem



Si $z = x_0 + h + iy_0$

$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{u(x_0+h,y_0)+iv(x_0+h,y_0) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)}{h}$

$= \frac{u(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)}{h} + i \frac{v(x_0+h,y_0)-v(x_0,y_0)}{h}$

$\lim \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$ (1)

Si $z = x_0 + i(y_0+h)$

$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{u(x_0,y_0+h)+iv(x_0,y_0+h) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)}{ih}$

$= -i \frac{u(x_0,y_0+h)-u(x_0,y_0)}{h} + \frac{v(x_0,y_0+h)-v(x_0,y_0)}{h}$

$\lim \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$ (2)

(1) et (2) doivent coincider

$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$

$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$

$\Leftarrow$: supp $u, v \in \mathcal{C}^1$, les cond. de Cauchy-Riem.

Satisfaites et montrons que $\lim \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe,

et $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$

$z = x+iy$ $z_0 = x_0+iy_0$

$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{u(x,y)+iv(x,y) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)}{x-x_0+i(y-y_0)}$

$= \frac{(x-x_0)\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,y_2) + (y-y_0)\frac{\partial v}{\partial x}(x_2,y_2) + i\left((x-x_0)\frac{\partial v}{\partial x}(x_2,y_2) + (y-y_0)\frac{\partial v}{\partial y}(x_2,y_2)\right)}{x-x_0+i(y-y_0)}$

où $(x_1,y_1) = \theta_1(x,y) + (1-\theta_1)(x_0,y_0)$ $0 < \theta_1 < 1$

$(x_2,y_2) = \theta_2$ — θ_2 — $0 < \theta_2 < 1$

On utilise les cond. de Cauchy-Riem.

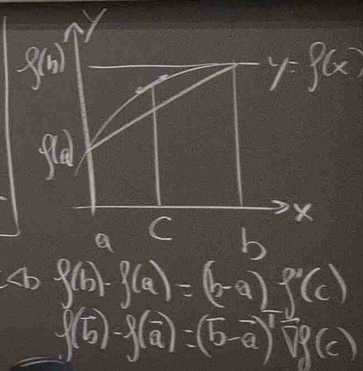
$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = (x-x_0)\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,y_1) + (y-y_0)\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x_1,y_1) + i\left((x-x_0)\frac{\partial v}{\partial x}(x_2,y_2) + (y-y_0)\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,y_2)\right)$

$x-x_0+i(y-y_0)$

Après calcul on obtient

$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{((x-x_0)+i(y-y_0))\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,y_2) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_2,y_2)\right) + i(x-x_0)\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,y_2) - \frac{\partial v}{\partial x}(x_2,y_2)\right) + i(y-y_0)\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,y_2)}{x-x_0+i(y-y_0)}$

$\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,y_2) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_2,y_2)$



$\exists a < c < b$ $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$

$f(b) - f(a) = (b-a)^T \nabla f(c)$

$= \frac{(x-x_0)\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,y_1)+(y-y_0)\frac{\partial u}{\partial y}(x_1,y_1)+i\left((x-x_0)\frac{\partial v}{\partial x}(x_2,y_2)+(y-y_0)\frac{\partial v}{\partial y}(x_2,y_2)\right)}{x-x_0+i(y-y_0)}$

On utilise les cond. de Cauchy-Riem.

Après calcul on obtient $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{(x-x_0)+i(y-y_0)}{x-x_0+i(y-y_0)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,y_1)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_1,y_1)\right)$

$\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,y_2)$

$\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,y_2)-\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,y_2)$

$\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,y_2)$

$\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,y_2)-\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,y_2)$

$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_1,y_1)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_1,y_1)+\underbrace{\frac{x-x_0}{x-x_0+i(y-y_0)}}_{\text{module}\leq 1}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,y_1)-\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,y_2)\right)}_{\text{tend vers 0 lorsque } z\to z_0 \text{ car } \frac{\partial u}{\partial x} \text{ est continue}}+i\underbrace{\frac{y-y_0}{x-x_0+i(y-y_0)}}_{\text{module}\leq 1}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,y_2)-\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,y_2)\right)}_{\text{idem}}$

On prend la limite $z\to z_0$.

$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)+0$

Ex : • $f(z)=z^2=x^2-y^2+i2xy$

$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=2x=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$

$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-2y=-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$

f holom., $f'(z)=2x+i2y=2z$

• $f(z)=\bar{z}=x-iy$

$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=1$ $\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=-1$

f n'est pas hol.

• $f(z)=e^z=e^{x+iy}=e^x e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$

$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=e^x\cos y=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$

$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=e^x\sin y=-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$

f holom., $f'(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^{x+iy}=e^z$

• $f(z)=\log z=\log|z|+i\arg z$

$z\neq 0$ $-\pi<\arg z\leq\pi$

par ex si $x>0$ $y\in\mathbb{R}$

$f(z)=\underbrace{\log\sqrt{x^2+y^2}}_{u(x,y)}+i\underbrace{\arctan\frac{y}{x}}_{v(x,y)}$



$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}2x=\frac{x}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=$

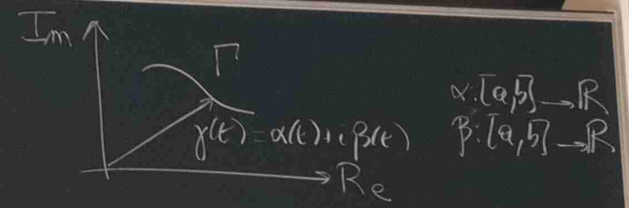
f holom. dans $\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C}\,;\,\mathrm{Im}\,z=0,\,\mathrm{Re}\,z\leq 0\}$

$f'(z)=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}$

$=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{x+iy}\frac{x-iy}{x-iy}\right)$

Chap. 10 : intégration complexe

Thm Cauchy
Formules int. de Cauchy



$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$
$\beta : [a,b] \to \mathbb{R}$

Def 10.1 - Ligne : Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe régulière de paramétrisation

$\gamma : [a,b] \to \Gamma$
$t \to \gamma(t)$

Soit $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ continue, on définit

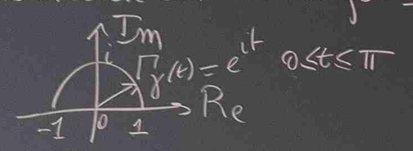
$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

$\int_\Gamma f(z)dz$

attention : produit de 2 nombres complexes

$f : \Gamma \to \mathbb{C}$
$z \to f(z)$
$x+iy \to u(x,y) + iv(x,y)$

Ex : Γ demi cercle centre 0 rayon 1



$f(z) = z^2$

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^\pi dt\,(e^{it})^2\, ie^{it}$$

$$= i\int_0^\pi e^{3it}\,dt = \frac{i}{3i}\left[e^{3it}\right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{1}{3}(-1-1) = -2/3$$

Formellement (ex 10.10)

$$\int_\gamma z^2 dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=e^{i0}}^{z=e^{i\pi}} = \frac{e^{i3\pi}-1}{3} = -\frac{2}{3}$$

Γ cercle centre 0 rayon 1
$\gamma(t) = e^{it}$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

$$\int_\gamma z^2 dz = 0$$

(aussi une conséquence du Thm de Cauchy)

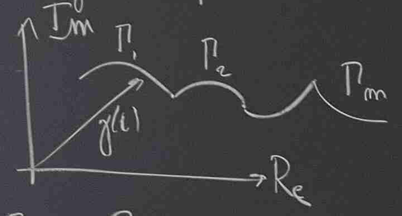
Ex : $f(z) = \frac{1}{z}$ $\quad z \neq 0$

Γ cercle centre 0 rayon $r > 0$

$$\int_\Gamma \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

$\gamma(t) = re^{it}$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$
$\gamma'(t) = ire^{it}$

Si Γ est régulière par morceaux



$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_m$

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^{m} \int_{\Gamma_i} f(z)dz$$

Thm 10.4 : Thm Cauchy

Soit $f : D \to \mathbb{C}$ holomo
où D est simplement co
(pas de trous)
Soit γ une courbe
régulière (par morceau

Ex : $f(z) = \frac{1}{z}$

On ne peut
D'ailleur
on a trou

Par cont

Rappel : form

$u : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x, y \to u(x,y)$

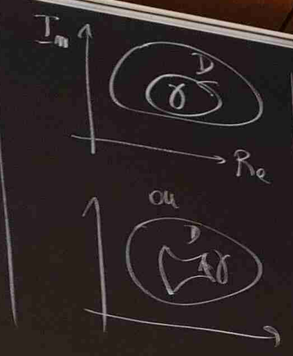
$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$

intég

Thm 10.1 : Thm Cauchy

Soit $f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe où D est simplement connexe (pas de trous)

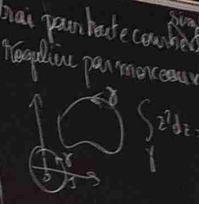
Soit γ une courbe simple fermée régulière (par morceaux) $\gamma \subset D$



Alors on a $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

Ex : $f(z) = \frac{1}{z^2}$ $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ holom. Γ cercle centré 0 rayon 1 est une courbe fermée régulière $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$

Vrai pour toute courbe simple fermée régulière par morceaux



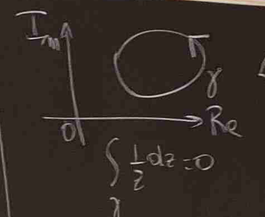
$\int_\gamma z^2\,dz = 0$

Ex : $f(z) = \frac{1}{z}$ $f : \underbrace{\mathbb{C}\setminus\{0\}}_{\text{pas simpl. connexe}} \to \mathbb{C}$ holomorphe

On ne peut pas appliquer le thm de Cauchy

D'ailleurs si Γ est le cercle de centre rayon $r>0$ on a trouvé $\int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$

Par contre, si γ est courbe simple fermée régulière par morceaux et $0 \notin \operatorname{int}\gamma$ alors $\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 0$



$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 0$

Dem du Thm de Cauchy

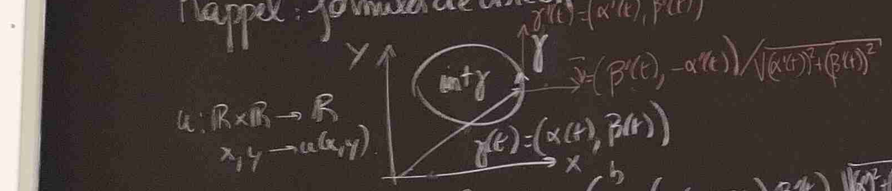
$$\int_\gamma g(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \left(u(\alpha(t),\beta(t)) + i\,v(\alpha(t),\beta(t))\right)\left(\alpha'(t)+i\beta'(t)\right)dt$$

Cauchy-Riemann

$$= \int_a^b \left(u(\alpha(t),\beta(t))\alpha'(t) - v(\alpha(t),\beta(t))\beta'(t)\right)dt + i\int_a^b \left(v(\alpha(t),\beta(t))\alpha'(t) + u(\alpha(t),\beta(t))\beta'(t)\right)dt$$

Rappel : formules de Green



$u : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x, y \to u(x,y)$

$\vec{\gamma} = (\beta'(t), -\alpha'(t))/\sqrt{(\alpha'(t))^2+(\beta'(t))^2}$

$$\iint_{\operatorname{int}\gamma} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy = \int_\gamma u\,v_x\,d\ell = \int_a^b dt\,\left(u(\alpha(t),\beta(t))\frac{\beta'(t)}{\sqrt{(\alpha')^2+(\beta')^2}}\sqrt{(\alpha')^2+(\beta')^2}\right)$$

$$= \int_a^b u(\alpha(t),\beta(t))\,\beta'(t)\,dt$$

$u \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ car f holomorphe

Dernière $\iint_{\operatorname{int}\gamma} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = \int_\gamma u\,v_y\,d\ell$

$$= -\int_a^b u(\alpha(t),\beta(t))\,\alpha'(t)\,dt$$

Donc $\int_\gamma f(z)\,dz = \iint_{\operatorname{int}\gamma}\left(\underbrace{-\frac{\partial u}{\partial y}}_{=0 \text{ (Cauchy-Riemann)}} - \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}\right)dx\,dy + i\iint_{\operatorname{int}\gamma}\left(\underbrace{-\frac{\partial v}{\partial y}}_{=0 \text{ (Cauchy-Riemann)}} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx\,dy = 0$

La réciproque du Thm de Cauchy est fausse

Contre ex : $f : D \to \mathbb{C}$ D n'est pas simplement connexe

γ simple fermée régulière par morceaux $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

$f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $z \to \frac{1}{z^2}$ γ Cercle centré

Que se passe-t-il si $f : D \to \mathbb{C}$

D n'est pas simplement connexe

et $\gamma \subset D$ γ courbe simple fermée régulière par morceaux

D a un seul trou



$f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe

D a un trou

γ courbe simple

$0 \in$

ref démon Cauchy

La réciproque du Thm 10.1 est fausse :

contre ex : $f : D \to \mathbb{C}$ D n'est pas simplement connexe

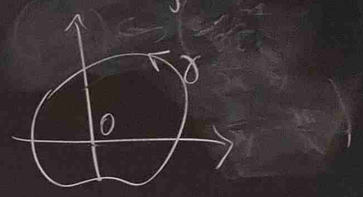
γ simple fermée régulière par morceaux $\int_\gamma f(z)dz = 0$

$f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $z \to \frac{1}{z^2}$ γ cercle centré 0 rayon r

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2}dz = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{(re^{it})^2}dt = \frac{i}{r^2}\int_0^{2\pi} e^{-it}dt$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(\frac{-1}{i}\right)\left[e^{-it}\right]_0^{2\pi} = 0$$

D'ailleurs c'est une conséquence de la formule intégrale de Cauchy, vrai $\forall \gamma$ tq $0 \in \text{int}\,\gamma$

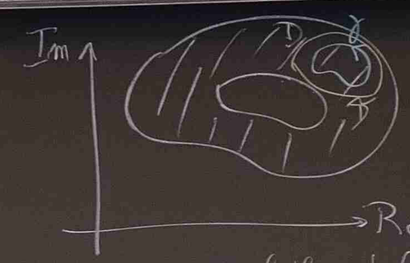


Que se passe-t-il si $f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe

D n'est pas simplement connexe

et $\gamma \subset D$ γ courbe simple fermée régulière par morceaux ?

D a un seul trou



$\text{int}\,\gamma \subset D$

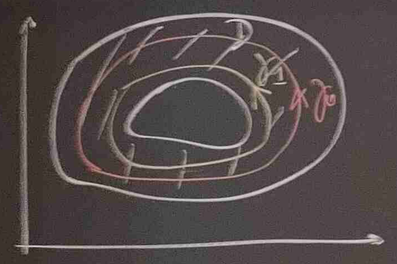
$\tilde{D} \subset D$

On peut appliquer le Thm de Cauchy

$f : \tilde{D} \to \mathbb{C}$ holomorphe simplement connexe

γ courbe simple fermée rég. par morceaux

et donc $\int_\gamma f(z)dz = 0$



$f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe

D a un trou

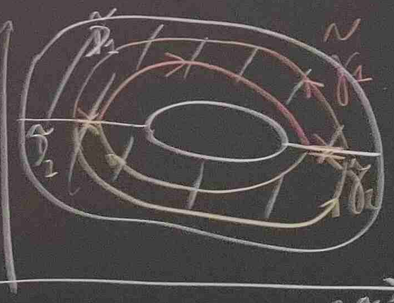
γ_0 courbe simple fermée rég (morceaux)

γ_1

Cf dessin ci-dessus

On a : $\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$

Dem :



On coupe D en 2

$D = \tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2$

$\tilde{D}_1$ et $\tilde{D}_2$ sont simplement connexes

$f : \tilde{D}_1 \to \mathbb{C}$ holomorphe $\Rightarrow$ ...

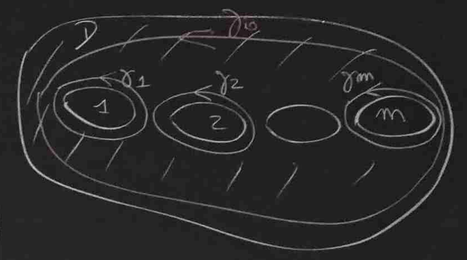
On peut appliquer le thm de Cauchy pour $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$

$$\int_{\tilde{\gamma}_1} f(z)\,dz = 0$$

$$\int_{\tilde{\gamma}_2} f(z)\,dz = 0$$

on somme $\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 0$ — car γ_1 est parcouru dans le sens opposé

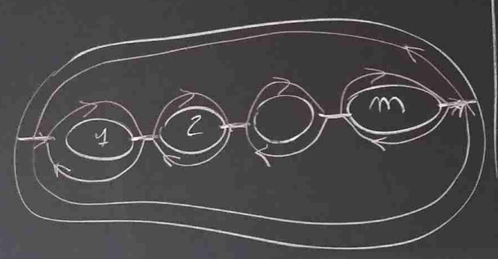
$f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe
D a m trous



Corollaire du thm de Cauchy

On a $\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} f(z)\,dz$

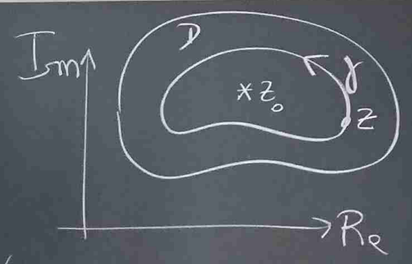
Dem :



Formules intégrales de Cauchy thm 10.3 Linc

$D \subset \mathbb{C}$ simplement connexe
$f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe
$\gamma \subset D$ courbe simple fermée régulière par morceaux

$z_0 \in \operatorname{int}\gamma$



On a : $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz.$

De plus (pour l'instant on sait que f holom $u, v \in \mathcal{C}^1$)
f est infiniment dérivable ($u, v \in \mathcal{C}^\infty$)
et on a $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz$$

Ex: on veut calculer $\int_\gamma \frac{1}{z} dz$



$0 \in \text{int}\,\gamma$

formule int de Cauchy avec $n=0$

$f(z)=1$ $\quad f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ holom $D=\mathbb{C}$

$z_0=0$

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z} dz$$

$$1 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z} dz$$

$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

Ex: $\int_\gamma \frac{1}{z^2} dz$

formule int Cauchy

$n=1$ $\quad f(z)=1$ $\quad z_0=0$

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z^2} dz$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z^2} dz$$

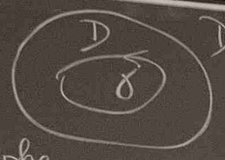
$$\int_\gamma \frac{1}{z^2} dz = 0$$

$\forall \gamma$ simple fermée reg. / morceaux

tq $0 \in \text{int}\,\gamma$

Chap 10

Thm Cauchy.



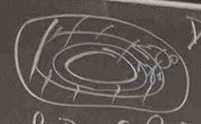
D simpl connexe

$f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe

γ courbe simple fermée régulière par morceaux

$\gamma \subset D$

alors $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$



D un trou

$f : D \to \mathbb{C}$ holom

$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$

Formules intégrale de Cauchy

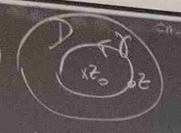
D simplement connexe

$f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe

$\gamma \subset D$ simple fermée

rég. morceaux

$z_0 \notin \operatorname{int}\gamma$



$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0)$$

De plus $f^{(n)}(z_0)$ existe pour $n \in \{1, 2, \dots\}$

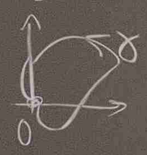
et $\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$

Application

Soit γ une courbe simple fermée rég. morceaux

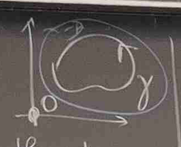
Calculons $\int_\gamma \frac{\cos(2z)}{z}\,dz$

3 cas : si $0 \notin \operatorname{int}\gamma$



l'int n'est pas déf

- si $0 \notin \operatorname{int}\gamma$

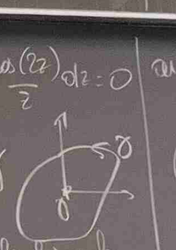


On peut appl le thm de Cauchy : D simpl connexe

$z \to \frac{\cos(2z)}{z}$ holomorphe dans D

et donc $\int_\gamma \frac{\cos(2z)}{z}\,dz = 0$

- si $0 \in \operatorname{int}\gamma$



on applique la formule int. de Cauchy

avec $n = 0$ $z_0 = 0$ $f(z) = \cos(2z)$

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holom

On a $\int_\gamma \frac{\cos(2z)}{z}\,dz = 2\pi i \cos(2\cdot 0) = 2\pi i$

Calculons $\int_\gamma \frac{e^{z+2}}{(z-2)^3}\,dz$

Soit γ simple fermée rég. morceaux

- si $2 \in \gamma$ l'int n'est pas déf
- si $2 \notin \operatorname{int}\gamma$, $z \to \frac{e^{z+2}}{(z-2)^3}$ holom. dans D

- si $z \in \operatorname{int}\gamma$, on applique la form int. de Cauchy avec

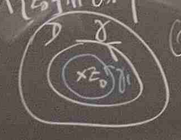
$n = 2$ $z_0 = 2$ $f(z) = e^{z+2}$ holom. dans $\mathbb{C}$

$$\int_\gamma \frac{e^{z+2}}{(z-2)^3} = \frac{2\pi i}{2!} f''(2) = \pi i\, e^4$$

Dem formule int. Cauchy $n = 0$

$z \to \frac{f(z)}{z - z_0}$ holomorphe dans $D \setminus \{z_0\}$

$(D \setminus \{z_0\}$ n'est pas simpl. connexe)



On a $\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$

On choisit γ_1 cercle centré z_0 rayon ε

(ε destiné à tendre vers 0)

param de γ_1 : $\gamma(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}$ $0 \le t \le 2\pi$

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = \int_0^{2\pi} dt\, \frac{f(z_0 + \varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}}\, i\varepsilon e^{it}$$

$$\int_0^{2\pi} dt\, \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z_0}\,\gamma'(t)$$

On prend la limite quand $\varepsilon \to 0$.

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = i \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{it})\,dt$$

$$= i \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} f(z_0 + \varepsilon e^{it})\,dt = i \int_0^{2\pi} f(z_0)\,dt = 2\pi i\, f(z_0)$$

Si $t \to f(z_0 + \varepsilon e^{it})$ est [illegible] continue, uni par rapport à t

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uniformément

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (x,y) \in [a,b]$

$|x - y| \le \delta$ alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$\int_\gamma \frac{e^{z+2}}{(z-2)^3} = \frac{2\pi i}{2!} f''(2) = \pi i\, e^4$

$(D \setminus \{z_0\}$ n'est pas simpl. connexe)



On a $\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$

$\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_0^{2\pi} dt\ \frac{f(z_0+\varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}}\ i\varepsilon e^{it}$

$0 \le t \le 2\pi$

$\int_0^{2\pi} dt\ \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z_0}\gamma'(t)$

$\frac{1}{\gamma - z_0} = \frac{1}{\varepsilon e^{it}}$

$= i \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} f(z_0+\varepsilon e^{it})\,dt = i \int_0^{2\pi} f(z_0)\,dt = 2\pi i\, f(z_0)$

$t \to f(z_0+\varepsilon e^{it})$ continue, unif par rapport à t

$u(x_0+\varepsilon\cos t, y_0+\varepsilon\sin t) + iv(x_0+\varepsilon\cos t, y_0+\varepsilon\sin t)$

n quelconque : par induction sur n

Cas $n=1$: on sait $\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} = 2\pi i\, f(z_0)$ $(*)$

on veut montrer $\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} = \frac{2\pi i}{1!} f'(z_0)$

f holomorphe dans D

$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$

on utilise $(*)$

$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\int_\gamma \frac{f(z)}{z-(z_0+h)} dz - \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz}{h}$

$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)(z-z_0) - f(z)(z-(z_0+h))}{(z-(z_0+h))(z-z_0)\,h}$

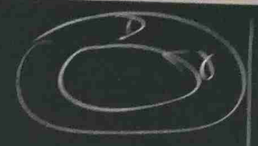
$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-(z_0+h))(z-z_0)} dz$

$f(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-(z_0+h))(z-z_0)} dz$

$z \to \frac{f(z)}{(z-(z_0+h))(z-z_0)}$ cont, unif. cont. par. à z

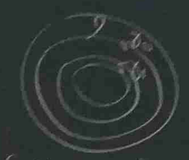
$= \frac{1}{2\pi i} \int \lim_{h \to 0} \frac{f(z)}{(z-(z_0+h))(z-z_0)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$

Rappel Chap 10



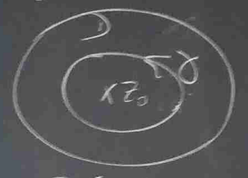
$f : D \to \mathbb{C}$ D simpl. connexe
holomorphe
γ courbe simple fermée rég. morceaux
$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

$f : D \to \mathbb{C}$ hol. D un trou



$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_0} f(z)\,dz$

$f : D \to \mathbb{C}$ hol. D simpl connexe
$\gamma \subset D$ simple fermée rég morceaux



$z_0 \in \text{int}\,\gamma$

$$2\pi i\, f(z_0) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz$$

Chap 11 : Séries de Taylor — Laurent

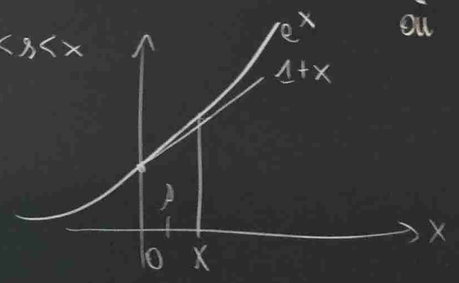
Rappels dans $\mathbb{R}$: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^∞ ne pas confondre avec limité (Taylor) et séries de Taylor

- développement limité : $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(s x + (1 - s) x_0)$

ex : $x_0 = 0$ $\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^s \quad 0 < s < x$

$= 1 + x + \frac{x^2}{2} e^s \quad 0 < s < x$

si x est proche de 0, $\frac{x^2}{2} e^s$ est petit



où $0 < s < 1$

- série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$= f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \dots$$

a-t-on l'égalité ?

oui si $f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ($x_0 = 0$)

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

oui si $f(x) = \frac{1}{1-x}$ et $|x| < 1$

$1 - x^{n+1} = (1-x)(1 + x + x^2 + \dots + x^n)$

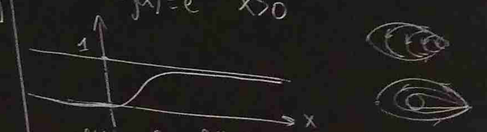
lim $n \to \infty$ de cette égalité

si $|x| < 1$ alors $\lim x^n = 0$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

mais si $f(x) = 0$ $x \le 0$

$f(x) = e^{-1/x^2}$ $x > 0$



$f'(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2}-0}{x} = 0$

de même $f^{(n)}(0) = 0$ mais si $x > 0$ $f(x) > 0$

on ne peut pas avoir pour $x > 0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

($x_0 = 0$)

$m > 0$ $\quad$ 0

Que se passe-t-il dans $\mathbb{C}$?

Thm (Cas part. du Thm II.1, remarque dans le livre)

$f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe

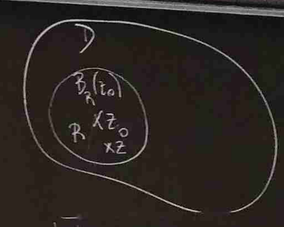
D simplement connexe

$z_0 \in D$

Soit $B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} ; |z - z_0| < R\}$

R tel que $B_R(z_0) \subset D$

Soit $z \in B_R(z_0)$



On a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

$$= f(z_0) + (z-z_0)f'(z_0) + \dots + \frac{(z-z_0)^n}{n!}f^{(n)}(z_0) + \dots$$

Exemples :

- $f(z) = e^z$ $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holom. $D = \mathbb{C}$ $R = +\infty$ $z_0 = 0$

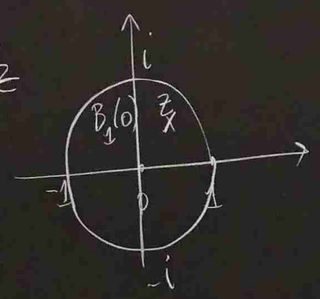
$\forall z \in \mathbb{C}$ $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^n}{n!} + \dots$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

- $f(z) = \sin z$ $D = \mathbb{C}$ $R = +\infty$ $z_0 = 0$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

- $f(z) = \frac{1}{1-z}$



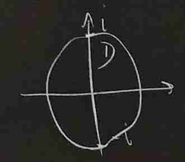
$\forall z$ tel que $|z| < 1$ on a

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$$

En effet : $1 - z^{n+1} = (1-z)(1 + z + \dots + z^n)$

lim $n \to \infty$: $z^n \xrightarrow{n \to \infty} 0$ si $|z| < 1$

- $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$

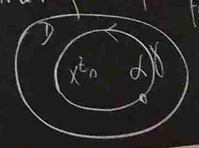


$\forall z$ tel que $|z| < 1$

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

$= 1 - z^2 + z^4 + \dots$ (série géométrique de raison $-z^2$)

Remarque : on a toujours pour toute courbe $\gamma \subset D$ fermée simple reg. morceaux telle que $z_0 \in \text{int}\,\gamma$



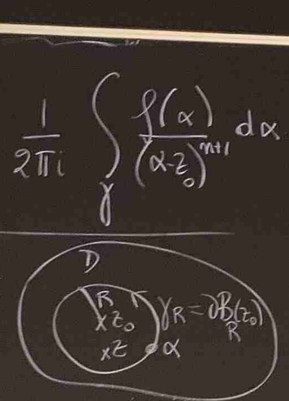
Cauchy-Riemann
DC Ouvert

$\left(\begin{array}{l} f: D \to \mathbb{C} \text{ holomorphe} \\ \forall z_0 \in D \ \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f(z_0) \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(u, v \in \mathcal{C}^1 \ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\right)$

$\mathcal{C}^\infty$ en vertu de la formule int de cauchy $f^{(n)}(z_0)$ existe

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)^{n+1}} d\alpha$$

Dem thm :



On a la formule intégrale de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z} d\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z_0 + z_0 - z} d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)\left(1 - \underbrace{\frac{z - z_0}{\alpha - z_0}}_{q}\right)} d\alpha$$

$\frac{1}{1-q} = \sum_{m=0}^{\infty} q^m$ si $|q| < 1$

$|q| = \frac{|z - z_0|}{|\alpha - z_0|} < 1$ car $|z - z_0| < |\alpha - z_0| = R$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\alpha - z_0}\right)^m d\alpha$$

si on peut permuter $\int$ et $\sum_{m=0}^{\infty}$ on obtient

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (z - z_0)^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)^{n+1}} d\alpha$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (z - z_0)^m \frac{f^{(m)}(z_0)}{n!}$$

Pourquoi peut-on permuter $\int$ et $\sum_{n=0}^{\infty}$?

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n(t)\, dt$$

si $\sum_{n=0}^{N} a_n(t)$ converge (lorsque $N \to \infty$)

uniformément par rapport à t

C'est le cas si $\sum_{n=0}^{N} a_n(t)$ converge normalement

Periodensystem der Ele
Tableau périodique des
H Li Be Na Mg K Ca Sc Y Rb Sr Cs Ba Fr Ra Rh
ettre
échets
FL?
À l'EcoPoint le plus proche

c'est à dire

$|a_m(t)| \leq b_m \quad \forall a \leq t \leq b$

et $\sum_{m=0}^{\infty} b_m < +\infty$

Retour à $\int_{\gamma_R} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z_0} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\alpha - z_0}\right)^m d\alpha$

param de γ_R : $\gamma(t) = z_0 + Re^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$= \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+Re^{it})}{Re^{it}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{Re^{it}}\right)^m iRe^{it} dt$

$|a_m(t)| = \left| f(z_0+Re^{it}) i \left(\frac{z-z_0}{Re^{it}}\right)^m \right|$

$\leq \underbrace{\max_{z \in B_R(z_0)} |f(z)|}_{b_m} |z|^m$ module ≤ 1 C indep de t

$\sum_{m=0}^{\infty} b_m \leq \max_{z \in B_R(z_0)} |f(z)| \frac{1}{1-C}$

Que se passe-t-il si f est singulière en z_0 ?

Par exemple $f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}$ avec g holomorphe ?

Thm 11.1 Série de Laurent

$D \subset \mathbb{C}$ simplement connexe

$f : D \setminus \{z_0\}$ holomorphe

Soit R tel que $B_R(z_0) \subset D$, soit $z \in B_R(z_0)$



Alors on a

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$

où $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)^{n+1}} d\alpha$

où γ est une courbe simple fermée régulière par morceaux telle que $z_0 \in \text{int}\,\gamma$

Remarques : • $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$

$\forall z \in B_R(z_0)$

$= \underbrace{\cdots + c_{-m} \frac{1}{(z-z_0)^m} + \cdots + c_{-1} \frac{1}{z - z_0}}_{\text{partie singulière}} + \underbrace{c_0 + c_1 (z-z_0) + \cdots + c_n (z-z_0)^n + \cdots}_{\text{partie régulière}}$

Si $f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe la partie singulière est nulle $c_n = 0$ pour $n < 0$

• $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\alpha) d\alpha \overset{\text{note}}{=} \text{Res}_{z_0} f$ permet de calculer $\int_{\gamma} f(\alpha) d\alpha$

• Série de Taylor

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}$

$f(x)$

$\forall a$-t

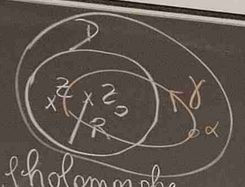
ou si $f(x)$

on ne peut

Que se

Chap II. Séries de Laurent

Séries de Taylor



$f : D \to \mathbb{C}$, D simpl. connexe, f holomorphe

$z_0 \in D$

R tq $B(z_0) \subset D$

$\forall z \in B_R^R(z_0)$ on a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$

où $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)^{n+1}} d\alpha$

pour toute courbe simple fermée rég. par morceaux tq $z_0 \in \text{int}\,\gamma$

Séries de Laurent

Que se passe-t-il si f est sing. z_0 ?

$f : D \to \mathbb{C}$ D simpl. connexe

f holomorphe dans $D \setminus \{z_0\}$

Soit R tq $B_R^R(z_0) \subset D$

$\forall z \in B_R^R(z_0) \setminus \{z_0\}$ on a $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$

où $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)^{n+1}} d\alpha$

pour toute c.s.f. rect. tq $z_0 \in \text{int}\,\gamma$

Exemples

- Si $f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe
  $c_n = 0$ $n = -1, -2, -3, \dots$
  par $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\alpha) d\alpha = 0$ (thm de Cauchy (f holomorphe))

- $c_{-2} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)^{-1}} d\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\alpha)(\alpha - z_0) d\alpha = 0$ (thm de Cauchy $\alpha \to f(\alpha)(\alpha - z_0)$ holomorphe)

- $f(z) = \frac{1}{z}$ $z_0 = 0$ $f : \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphe
  $\forall z \in \mathbb{C}$ $z \neq 0$ $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \frac{1}{z}$

  $c_{-1} = 1$ $c_n = 0$ $n \neq -1$

  En effet $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\alpha^{-1+2}} d\alpha$

  $= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\alpha} d\alpha = \frac{2\pi i}{2\pi i} = 1$



$c_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\alpha^{n+2}} d\alpha$

$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\alpha^2} d\alpha$

formule int. de Cauchy $= \frac{1}{2\pi i} \cdot 0$

- $f(z) = \frac{1}{z}$ $z_0 = 1$

  $= \frac{1}{1-(1-z)}$

  $= \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n$

  z tq $|z-1| < 1$

  $z_0 = 1$ est un point régulier (pas de termes singuliers en $\frac{1}{(z-z_0)^n}$)

  $c_n = 0$ $n = -1, -2, -3, \dots$

  $c_n = 1$ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

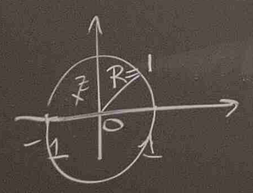
  ssi $|q| < 1$ $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$

- $f(z) = \frac{1}{z^2}$ $z_0 = 0$ $c_{-2} = 1$ $c_n = 0$ $n \neq -2$

  $= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$

  On dit que z_0 est un pôle d'ordre 2 de $\frac{1}{z}$

- $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ $z_0 = 0$



$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}$

$= \frac{1}{z} - \frac{1}{1-(-z)}$

$|z| < 1$

$= \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$

$c_{-1} = 1$

$c_n = -(-1)^n$ $n = 0, 1, 2, \dots$

$c_n = 0$, $n = -2, -3, \dots$

- $f(z) = e^{1/z}$ $z \neq 0$

  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$

  $= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} + \dots$

une infinité de termes singuliers

on dit que $z_0 = 0$ est une singularité essentielle de $e^{1/z}$

- $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ $z \neq 0$

  $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ $f(z) = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots$

$z_0 = 0$ est un point régulier de $\frac{\sin z}{z}$

- $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$

  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $f(z) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} + \dots$

On dit que 0 est un pôle d'ordre 1 de $\frac{\sin z}{z^2}$

$|z|<1$

$\frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$

- $f(z) = e^{1/z}$ $z \neq 0$

$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$

- $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ $z \neq 0$

$\forall z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ $f(z) = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \cdots$

- $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$

$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $f(z) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} + \cdots$

est un pôle d'ordre 1 de $\frac{\sin z}{z^2}$

Def II.1

- partie régulière $c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots$ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$
- ——— singulière $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n$
- z_0 est pole d'ordre m de $f(z)$ si

$c_{-m} \neq 0$ $c_{-n} = 0$ $n > m$

ordre 2 : $f(z) = \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots$

- z_0 singularité essentielle si $c_{-m} \neq 0$ pour une infinité de nombres positifs

- $c_{-1} = \operatorname{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\alpha)\, d\alpha$

est le résidu en z_0 de f

- le rayon de convergence est le plus grand R tel que $B(z_0, R) \subset D$

Prop II.3 : si z_0 est un pôle d'ordre m de f

alors $\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-z_0)^m f(z) \right)$

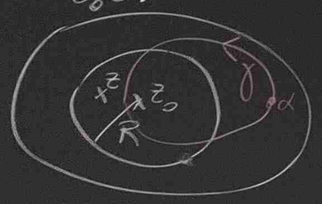
Dém $m=2$: $f(z) = \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots$

$(z-z_0)^2 f(z) = c_{-2} + c_{-1}(z-z_0) + c_0(z-z_0)^2 + c_1(z-z_0)^3 + \cdots$

$\frac{d}{dz}\left((z-z_0)^2 f(z) \right) = c_{-1} + 2c_0(z-z_0) + \cdots \xrightarrow{z \to z_0} c_{-1} = \operatorname{Res}_{z_0}(f)$

Thm (série de Laurent)

D simplement connexe
$z_0 \in D$



$f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorphe
R tel que $B_R(z_0) \subset D$

$\forall z \in B_R(z_0)$ on a $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$

où $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)^{n+1}} d\alpha$

γ courbe simple fermée régulière par morceaux telle que $z_0 \in \text{int}\,\gamma$

Si z_0 est une pôle d'ordre m (entier positif)

$$f(z) = \underbrace{\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}}_{\neq 0} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots + c_n(z-z_0)^n + \dots$$

$$= \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

alors $c_{-1} = \text{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-z_0)^m f(z)$

---

ex : $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-2)^2}$ $\quad z \neq 2$

$z_0 = 2$ est un pôle d'ordre 2 car $e^2 \neq 0$
on applique la formule

$(z-2)^2 f(z) = e^z$

$\dfrac{d}{dz}(\quad) = e^z$

$\lim_{z \to 2} \dfrac{\quad}{\quad} = e^z$

$\text{Res}_2(f) = e^2$

Vérification

$f(z) = \dfrac{e^z}{(z-2)^2} = \dfrac{e^{z-2+2}}{(z-2)^2} = \dfrac{e^2 e^{z-2}}{(z-2)^2} = \dfrac{e^2\left(1 + (z-2) + \frac{(z-2)^2}{2!} + \frac{(z-2)^3}{3!} + \dots\right)}{(z-2)^2}$

donc $c_{-1} = e^2$

$= \dfrac{e^2}{(z-2)^2} + \dfrac{e^2}{z-2} + \dfrac{e^2}{2!} + \dfrac{e^2(z-2)}{3!} + \dots$

Ex : $f(z) = \dfrac{\sin z}{1+z^2}$ $\quad 1+z^2 =$

$z_0 = i$ pôle d'ordre

$c_{-1} = \text{Res}_i(f) = \lim_{z \to i} (z-i)$

γ_ε : paramétrisat

$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z} d\alpha$

$= \int_{\gamma_R}$ $\frac{f(\alpha)}{(\alpha - z$

$= \sum_{n=0}^{\infty}$

Conver

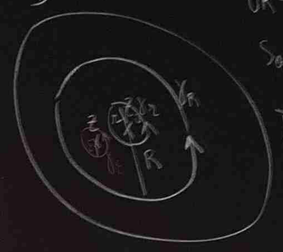
Ex : $f(z) = \frac{\sin z}{1+z^2}$ $\quad 1+z^2 = 0$ pour $z = \pm i$

$z_0 = i$ pôle d'ordre 1 car $\sin i = \frac{e^{i \cdot i} - e^{-i \cdot i}}{2i} = \frac{e^{-1} - e}{2i} \neq 0$

$c_{-1} = \mathrm{Res}_i(f) = \lim_{z \to i} (z-i) f(z) = \lim_{z \to i} \frac{\sin z}{z+i} = \frac{\sin i}{2i}$

Démonstration :

D



$\gamma_R = \partial B_R(z_0)$

Soit $\alpha \in B_R(z_0)$ $\quad \alpha \longmapsto \frac{f(\alpha)}{\alpha - z}$ holomorphe sauf $\mathrm{en}\ z_0$ et en z

D'après le corollaire 4 du thm Cauchy

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z} d\alpha = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z} d\alpha + \int_{\gamma_2} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z} d\alpha \quad (*)$$

γ_R : chemin à partie régulière — γ_ε : donne les points — γ_2 : donne $2\pi i f(z)$

γ_ε : paramétrisation $\gamma(t) = z + \varepsilon e^{it}$ $\quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z} d\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{f(z+\varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} i\varepsilon e^{it} \, dt \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 2\pi i f(z)$$

on peut permuter car $f(\gamma(t))$ est continue dans $[0, 2\pi]$

$\alpha \longmapsto \frac{f(\alpha)}{\alpha - z}$ $\quad \alpha \in \gamma_R$

$\frac{f(\alpha)}{\alpha - z} = \frac{f(\alpha)}{\alpha - z_0 + z_0 - z}$

$r = |\alpha - z_0| > |z - z_0|$

ie $\left| \frac{z - z_0}{\alpha - z_0} \right| < 1$

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z} d\alpha = \int_{\gamma_R} \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{\alpha - z_0}\right)} d\alpha$$

$$= \int_{\gamma_R} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\alpha - z_0} \right)^n d\alpha$$

$$= \int_{\gamma_R} \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)^{n+1}} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \, d\alpha$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_R} \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)^{n+1}} d\alpha \, (z - z_0)^n$$

car la série de terme $\frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n$ converge lorsque $n \to \infty$ uniformément par rapport à α

t ($\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$)

$\alpha \longmapsto \frac{f(\alpha)}{\alpha - z}$ $\quad \alpha \in \gamma_2$

$\frac{f(\alpha)}{\alpha - z} = \frac{f(\alpha)}{\alpha - z_0 + z_0 - z}$

$r = |\alpha - z_0| < |z - z_0|$

$\left| \frac{\alpha - z_0}{z - z_0} \right| < 1$

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z} d\alpha = \int_{\gamma_2} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z_0 + z_0 - z} d\alpha$$

$$= -\int_{\gamma_2} \frac{f(\alpha)}{(z - z_0)\left(1 - \frac{\alpha - z_0}{z - z_0}\right)} d\alpha$$

$$= -\int_{\gamma_2} \frac{f(\alpha)}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha - z_0}{z - z_0} \right)^n d\alpha$$

on permute $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_2}$ (convergence lorsque $n \to \infty$ vers 0 car $\frac{1}{r} < 1$)

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\gamma_2} f(\alpha)(\alpha - z_0)^n d\alpha \right) \times \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}}$$

holomorphe sauf
z_0 et en z

(*)

$2\pi i\, f(z)$

$n+1 = -m$

$$-\sum_{m=-1}^{-\infty} \int_{\gamma_2} \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)^{n+1}}\, d\alpha\, (z-z_0)^m$$

$q \in \mathbb{C} \quad |q| < 1$

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$$

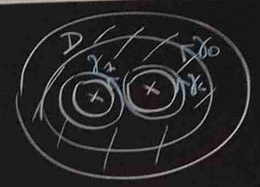
$$1 - q^{n+1} = (1-q)(1 + \cdots + q^n)$$

$z_0 = 0$

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!}}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{4!} \cdots$$

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \cdots$$

Corollaire thm Cauchy



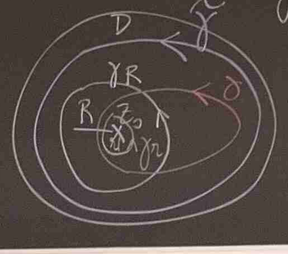
$f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

(*) donne

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)^{n+1}}\, d\alpha\, (z-z_0)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)^{n+1}}\, d\alpha\, (z-z_0)^n$$

Corollaire thm Cauchy



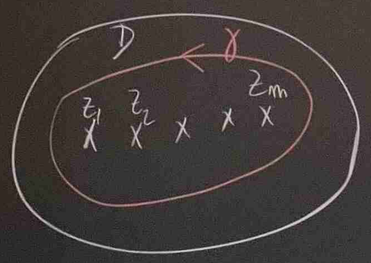
$$\int_{\gamma} \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)^{n+1}}\, d\alpha = \int_{\gamma_R} \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)^{n+1}}\, d\alpha \qquad \left(\alpha \to \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)^{n+1}} \text{ hdom } D \setminus \{z_0\}\right)$$

$$= \int_{\gamma_2} \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)^{n+1}}\, d\alpha = \int_{\gamma} \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)^{n+1}}\, d\alpha$$ d'où le résultat

Chap 12 : thm des résidus

D simplement connexe

$z_1, z_2, \ldots, z_m \in D$



$f : D \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ holomorphe

γ courbe simple fermée reg. par morceaux

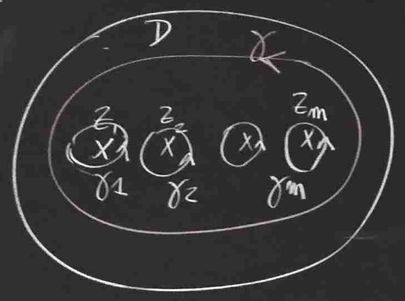
telle que $z_1, z_2, \ldots, z_m \in \operatorname{int} \gamma$

Alors on a

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z_1}(f) + \cdots + \operatorname{Res}_{z_m}(f) \right)$$

Periodensys
Tableau pé
mettre
s déchets
'EPFL ?
À l'EcoPoint
le plus proche

Dem: Corollaire thm Cauchy



$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \dots + \int_{\gamma_m} f(z)dz$$
$$= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z_1}(f) + \operatorname{Res}_{z_2}(f) + \dots + \operatorname{Res}_{z_m}(f) \right)$$

Ex: $f(z) = \frac{1}{z} \quad z \neq 0$

$D = \mathbb{C} \quad m = 1 \quad z_1 = 0$



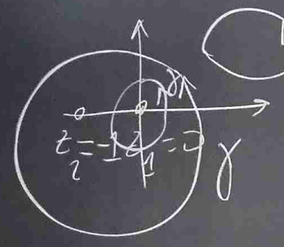
Si $z_1 \notin \operatorname{int}\gamma$: thm Cauchy $\int_\gamma \frac{1}{z} dz = 0$

$z_1 \in \operatorname{int}\gamma$: thm Résidu $\int_\gamma \frac{1}{z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_1}(f)$

$= 2\pi i \operatorname{Res}_0\left(\frac{1}{z}\right) = 2\pi i$

On aurait pu utiliser la formule intégrale de Cauchy

$f(z) = \frac{1}{z(z+1)} \qquad z_1 = 0 \quad z_2 = -1$



Si $z_1, z_2 \notin \operatorname{int}\gamma$

thm de Cauchy

$\int_\gamma f(z)dz = 0$

Si z_1 et $z_2 \in \operatorname{int}\gamma$

thm résidus

$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z_1}(f) + \operatorname{Res}_{z_2}(f) \right)$

2 manière de calculer les résidus

$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} \leftarrow \operatorname{Res}_{z_2}(f) = -1$

$\uparrow \operatorname{Res}_{z_1}(f) = 1$

donc $\int_\gamma f(z)dz = 0$

On peut aussi appliquer la formule

$$(z-z_1)f(z) = zf(z) = \frac{1}{z+1} \xrightarrow[z\to 0]{z\to z_1} 1 = \mathrm{Res}_{z_1}(f)$$

$$(z-z_2)f(z) = (z+1)f(z) = \frac{1}{z} \xrightarrow[z\to -1]{z\to z_2} -1 = \mathrm{Res}_{z_2}(f)$$

Si $z_1 \in \mathrm{int}\,\gamma$, thm résidu

et $z_2 \notin \mathrm{int}\,\gamma$ $\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\, \mathrm{Res}_{z_1}(f) = 2\pi i$

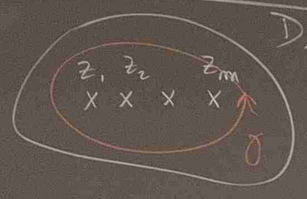
on aurait pu utiliser la formule int de Cauchy

jeudi calculs du type

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$$

et $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{iax}\,dx$

Chap 12 Thm résidus



D simplement connexe
$z_1, z_2, \dots, z_m \in D$
$f : D \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ holomorphe
γ courbe simple fermée régulière par morceaux tq $z_1, z_2, \dots, z_m \in \text{int}\,\gamma$

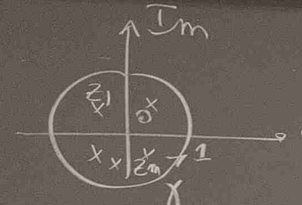
Alors $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \left(\text{Res}_{z_1}(f) + \dots + \text{Res}_{z_m}(f) \right)$

Applications

- intégrale du type $I = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$

Soit γ le cercle centré en 0 rayon 1
Soit $\tilde{f}(z)$ à définir, on a
$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \underbrace{ie^{i\theta}}_{\gamma'(\theta)} d\theta$ avec $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$
D'autre part $I = \int_0^{2\pi} f\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right) d\theta$

On identifie les 2 int (on pose $z = e^{i\theta}$)
$\tilde{f}(z)\,iz = f\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)$
On applique le thm des résidus à $\tilde{f}$ et γ cercle centré en 0 rayon 1



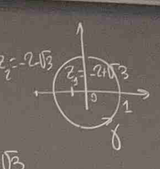
x_i : points singuliers de f
$z_1, \dots, z_m$

$I = \int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \left(\text{Res}_{z_1}(f) + \dots + \text{Res}_{z_m}(f) \right)$

Ex : $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta}\,d\theta$

$f(z)\,iz = \frac{1}{2+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}} = \frac{2z}{z^2+4z+1}$

$\tilde{f}(z) = \frac{2}{i(z^2+4z+1)}$



racines de z^2+4z+1 :
$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$

$I = \int_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta}\,d\theta = 2\pi i\, \text{Res}_{z_1}(f)$

$\text{Res}_{z_1}(f) = ?$

$f(z) = \frac{2}{i(z-z_1)(z-z_2)}$

$\text{Res}_{z_1}(f) = \lim_{z \to z_1} (z-z_1) f(z) = \frac{2}{i(z_1-z_2)} = \frac{2}{i2\sqrt{3}}$

Conclusion
$I = 2\pi i \frac{2}{i2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

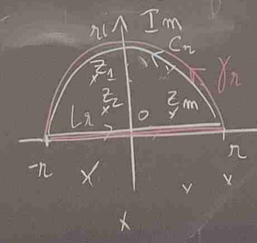
$f(z) = \frac{c_1}{z-z_1} + c_0 + c_1(z-z_1) + \dots$

- intégrale du type $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, e^{iax}\,dx$ $a \geq 0$

ici $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ P, Q polynôme tq $Q(x) \neq 0$ $x \in \mathbb{R}$ et $\deg Q \geq \deg P + 2$

ex $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{16+x^4}\,dx$ utile transformées de Fourier

On considère $f : z \to f(z) = R(z)e^{iaz} = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz}$



x : racines de $Q(z) = 0$
r suff. grand de sorte que les racines de $Q(z)$, de partie imaginaire positives soient contenues dans $\text{int}\,\gamma_r$

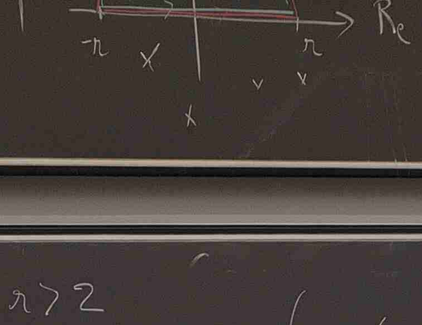
où $\gamma_r = L_r \cup C_r$
$L_r = [-r, r]$ C_r demi cercle centré 0 rayon r

Soient $z_1, \dots, z_m$ les racines de $Q(z) \in \text{int}\,\gamma_r$ (i.e. celles qui ont une partie imaginaire > 0)

Alors résidus :
$\int_{\gamma_r} R(z)e^{iaz}dz = 2\pi i \left(\text{Res}_{z_1}(R(z)e^{iaz}) + \dots + \text{Res}_{z_m} R(z)e^{iaz} \right)$

$\int_{\gamma_r} = \int_{L_r} + \int_{C_r}$ on va faire tendre $r \to \infty$
$\int_{L_r} \xrightarrow{r \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}dx$ et on va montrer $\int_{C_r} \xrightarrow{r \to \infty} 0$

ex $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{16+x^4}\,dx$ utile transformées de Fourier



que les racines de $Q(z)$, de partie imaginaire positives

cercle centre 0 rayon r

partie imaginaire >0

Thm résidu :

$$\int_{\gamma_r} R(z)e^{iaz}dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}_{z_1}(R(z)e^{iaz}) + \dots + \operatorname{Res}_{z_m} R(z)e^{iaz}\right)$$

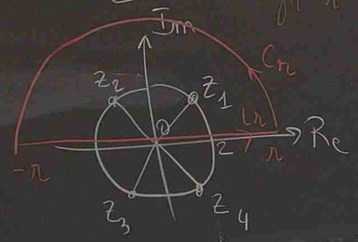
Racines de $Q(z) = 16+z^4$ $\quad \left(f(z) = \frac{z^2}{16+z^4}\right)$

$$re^{4i\theta} = z^4 = -16 = -2^4 = 2^4 e^{i\pi}$$

$k \in \mathbb{Z}$

$$z_1 = 2e^{i\pi/4} \qquad z_2 = 2e^{3i\pi/4}$$

$\gamma_r = I_r \cup C_r$



$r > 2$

$$\int_{\gamma_r} \frac{z^2}{16+z^4}\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}_{z_1}\left(\frac{z^2}{16+z^4}\right) + \operatorname{Res}_{z_2}\left(\frac{z^2}{16+z^4}\right)\right)$$

$$\underbrace{\int_{-r}^{r} \frac{x^2}{16+x^4}\,dx}_{I_r} + \int_{C_r} \frac{z^2}{16+z^4}\,dz = 2\pi i \cdots$$

$$\frac{z^2}{16+z^4} = \frac{z^2}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$$

$$\operatorname{Res}_{z_1}\left(\frac{z^2}{16+z^4}\right) = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{z^2}{16+z^4} = \frac{z_1^2}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)}$$

après calcul $= \frac{1+i}{8\sqrt{2}}$

Deuxième contribution

$$\operatorname{Res}_{z_2}\frac{z^2}{16+z^4} = \frac{1-i}{8\sqrt{2}}$$

$$I_r = \frac{2\pi i}{8\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$r \to \infty$ montrons $\int_{C_r} \to 0$

$\gamma(t) = re^{it}$ $\quad 0 \le t \le \pi$

$$\left|\int_{C_r} \frac{z^2}{16+z^4}\,dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{r^2 e^{2it}}{16+r^4e^{4it}}\,ire^{it}\,dt\right|$$

$$\le \int_0^\pi \frac{r^3}{|16+r^4e^{4it}|}\,dt \le \frac{r^3}{r^4-16}\pi \to 0$$

$|z^4| = |r^4e^{4it}| = |r^4e^{4it}+16-16|$

$\le |r^4e^{4it}+16| + 16$

$|r^4e^{4it}+16| \ge r^4-16 \quad r>2$



Chap 13 : applications conformes

Appl. à la mécanique des fluides

Def 13.1 $D \subset \mathbb{C}$ ouvert $f : D \to f(D) = D^*$

f est conforme de D dans D^* si

* $f : D \to D^*$ bijective
* f holomorphe

On peut alors montrer que $f'(z) \neq 0 \ \forall z \in D$

Ex :
- $f(z) = z$ conforme de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$
- $f(z) = \bar{z}$ n'est pas conforme car non hol.
- $f(z) = \frac{1}{z}$ est conforme de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (cf suite)

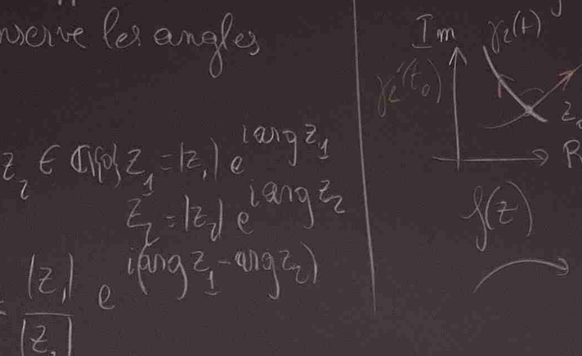
Remarque : une application conforme conserve les angles

En effet :

Rappel : $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, $z_1 = |z_1| e^{i \arg z_1}$, $z_2 = |z_2| e^{i \arg z_2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\arg z_1 - \arg z_2)}$$

et donc $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$)



On a $$\frac{f'(\gamma_1(t_0))\,\gamma_1'(t_0)}{f'(\gamma_2(t_0))\,\gamma_2'(t_0)} = \frac{f'(z_0)}{f'(z_0)} \frac{\gamma_1'(t_0)}{\gamma_2'(t_0)} = \frac{\gamma_1'(t_0)}{\gamma_2'(t_0)}$$

f est conforme donc $f'(z_0) \neq 0$

Def 13.2

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$,

$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ est une transformation de Moebius

Prop B3 :

- Si $ad - bc \neq 0$
  - Si $c = 0$ (et
    $f(z) = \frac{a}{d} z$
  - Si $c \neq 0$

Si $ad - bc \neq 0$

$f : \mathbb{C} \setminus$

f est holom

holom

Ex B.1

$$\begin{cases} x = \frac{u}{u^2+v^2} \\ y = \frac{-v}{u^2+v^2} \end{cases}$$

Soit $x, y \in$

$\alpha x + \beta$

Prop 13.3 :

- Si $ad-bc \neq 0$
  - Si $c=0$ (et donc $d \neq 0$)
    $f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ conforme
  - Si $c \neq 0$ $f : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ conforme

Dem :

injectivité : $(f(z_1) = f(z_2)) \overset{?}{\Rightarrow} (z_1 = z_2)$

$\frac{az_1+b}{cz_1+d} = \frac{az_2+b}{cz_2+d}$ $z_1, z_2 \neq -\frac{d}{c}$

$(az_1+b)(cz_2+d) = (az_2+b)(cz_1+d)$

$z_1(ad-bc) = z_2(ad-bc)$

et donc $z_1 = z_2$ si $ad-bc \neq 0$

surjectivité : Soit $w \in \mathbb{C}$ $\exists ? z$ tq $w = f(z)$

$w = \frac{az+b}{cz+d}$ $(z \neq -\frac{d}{c})$

$w(cz+d) = az+b$

$z(wc-a) = b-wd$

si $wc-a \neq 0$ $z = \frac{b-wd}{wc-a}$

surjectivité si $w \neq \frac{a}{c}$

Si $ad-bc \neq 0$ et $c \neq 0$

$f : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ est bijective

f est holomorphe car quotient de 2 fonctions holom., le dénom. ne s'annule pas

Ex 13.1 $f(z) = \frac{1}{z}$ $z \neq 0$ $(a=0, b=1, c=1, d=0)$

$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ conforme

$f(z) = \frac{1}{z}$ transforme droites ou cercles en droites ou cercles

En effet : 4 cas

cas 1 : droite passant par l'origine est transformée en une droite passant par l'origine

$z = x+iy$

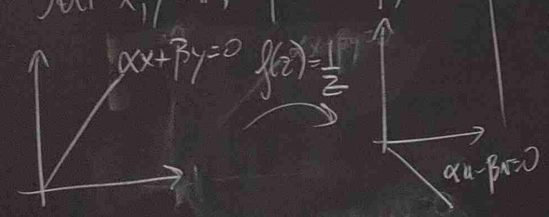
$f(z) = u+iv = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}$

$= \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}$

$\begin{cases} u = \frac{x}{x^2+y^2} \\ v = \frac{-y}{x^2+y^2} \end{cases}$ $u^2+v^2 = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2}$

$\begin{cases} x = \frac{u}{u^2+v^2} \\ y = \frac{-v}{u^2+v^2} \end{cases}$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tq $\alpha x + \beta y = 0$

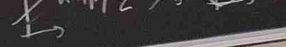


donc $\frac{\alpha u - \beta v}{u^2+v^2} = 0$.

puisque $u, v \neq 0$

$\alpha u - \beta v = 0$

cas 2 : une droite ne passant pas par l'origine est transformée en un cercle passant par l'origine



$\alpha x + \beta y = \frac{\gamma}{2}$ $\gamma \neq 0$

$\frac{2\alpha}{\gamma}x + \frac{2\beta}{\gamma}y = 1$

$\frac{2\alpha}{\gamma}u - \frac{2\beta}{\gamma}v = u^2+v^2$

$\left(u - \frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 + \left(v + \frac{\beta}{\gamma}\right)^2 = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\gamma^2}$

cercle $u=v=0$ ∉ cercle

cas 3 : un cercle passant par l'origine est transformé en une droite ne passant pas par l'origine



Soit $x, y \in \mathbb{R}$ $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2$

$\left(\frac{u}{u^2+v^2} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{-v}{u^2+v^2} - \beta\right)^2 = \alpha^2+\beta^2$

$$\frac{u^2 - 2u\alpha(u^2+v^2) + \alpha^2(u^2+v^2)^2 + v^2 + 2v\beta(u^2+v^2) + \beta^2(u^2+v^2)^2}{(u^2+v^2)^2} = \alpha^2+\beta^2$$

$$\frac{(u^2+v^2)(1 - 2\alpha u + 2\beta v)}{(u^2+v^2)^2} = 0$$

$u,v \neq 0 \quad 1 - 2\alpha u + 2\beta v = 0$

Cas 4 : un cercle ne passant par l'origine est transformé en un cercle ne passant pas par l'origine (exercice)

Prop 13.4
toute transformation de Moebius $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ transforme les droites ou cercles en droites ou cercles, pour autant que $(ad-bc \neq 0) \Rightarrow (d \neq 0 \text{ ou } c \neq 0)$

Dem. $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad f(z) = f_1(f_2(f_3(z)))$

$(f = f_1 \circ f_2 \circ f_3)$ avec

$f_3(z) = cz+d$
$f_2(z) = \frac{1}{z}$
$f_1(z) = \alpha z + \beta$ où α, β à déterminer

$z \xrightarrow{f_3} cz+d \xrightarrow{f_2} \frac{1}{cz+d} \xrightarrow{f_1} \alpha\frac{1}{cz+d} + \beta = \frac{az+b}{cz+d}$

f_3 : transf linéaire — f_1 transf linéaire

$\alpha + \beta(cz+d) = az+b$

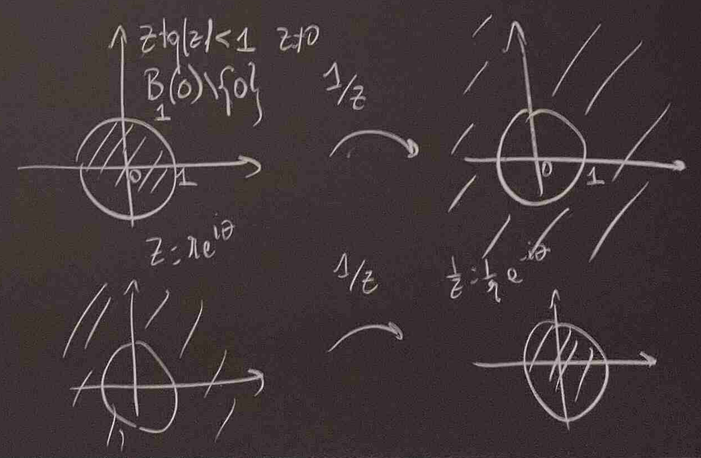
$\begin{cases} \alpha + \beta d = b & \alpha = b - \frac{ad}{c} \text{ si } c \neq 0 \\ \beta c = a & \beta = \frac{a}{c} \text{ si } c \neq 0 \end{cases}$

Si $c=0$ $f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ (si $d \neq 0$)

Conclusion ;
Si $c=0$ et $d \neq 0$ $f(z)$ est une transf linéaire
Si $c \neq 0$ $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$

On peut montrer (exercice sem. prochain) qu'une transf linéaire transforme les cercles en cercles et les droites en droites
In fine ($c=0$ ou $c \neq 0$) on transforme les cercles et droites en cercles et droites

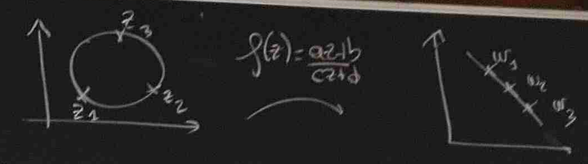
Remarque $f(z) = \frac{1}{z} \quad z \neq 0$



Les transformations de Mobius

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

sont caractérisées par la donnée de 3 points différents z_1, z_2, z_3 et de 3 images différentes $w_1 = f(z_1), w_2 = f(z_2), w_3 = f(z_3)$



Dem : on note $w = f(z)$ et on a (etem. exercice)

$$\frac{w-w_1}{w_2-w_1}\,\frac{w_2-w_3}{w-w_3} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}\,\frac{z_2-z_3}{z-z_3}$$

(w_1, w_2, w_3 / z_1, z_2, z_3 sont distincts)

ie $(w-w_1)(z-z_3)\,\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = (w-w_3)(z-z_1)\,\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$

β connu, α connu

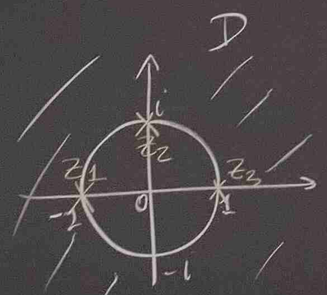
$$(w-w_1)(z-z_3)\beta = (w-w_3)(z-z_1)\alpha$$

$$w\big((z-z_3)\beta - (z-z_1)\alpha\big) = w_1(z-z_3)\beta - w_3(z-z_1)\alpha$$

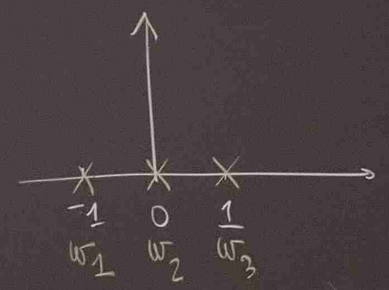
$$w\Big(\underbrace{(\beta-\alpha)}_{c}z + \underbrace{z_1\alpha - z_3\beta}_{d}\Big) = \Big(\underbrace{w_1\beta - w_3\alpha}_{a}\Big)z + \underbrace{w_3 z_1\alpha - w_1 z_3\beta}_{b}$$

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

Ex :



$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$



$$\begin{cases} f(-1) = -1 \\ f(i) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \frac{-a+b}{-c+d} = -1 \\ \frac{ai+b}{ci+d} = 0 \\ \frac{a+b}{c+d} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -a+b = c-d \\ ai+b = 0 \\ a+b = ci+d \end{cases} \quad b = -ai$$

Chap 13 - Transf. conformes

$f : D \to f(D) = D^*$ $\quad D \subset \mathbb{C}$ conforme si
- $f : D \to D^*$ bijective
- f holomorphe

on a alors $f'(z) \neq 0 \ \forall z \in D$, conserve les angles

$f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \quad a,b,c,d \in \mathbb{C}$

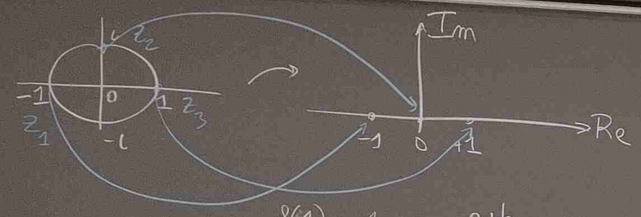
Si $ad-bc \neq 0$
- Si $c=0$ $(d \neq 0)$ $f(z) = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d}$
  $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ conforme
- Si $c \neq 0$ $f : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ conforme

$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$

$f_3(z) = cz+d$
$f_2(z) = \frac{1}{z}$
$f_1(z) = \alpha z + \beta$
$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ à déf de sorte que $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$

f_2 transf cercles et droites en cercles et droites
f_1 et f_3 —— cercles en cercles et les droites en droites (cf ex.)
donc f transf. cercles et droites en cercles et droites
Pour déf a,b,c,d la donnée de 3 z_1, z_2, z_3 distincts et de 3 images $f(z_1), f(z_2), f(z_3)$ distinctes suffit

$d \neq 0$
$f(z) = \dfrac{\frac{a}{d} z + \frac{b}{d}}{\frac{c}{d} z + 1}$
3 coeff à déf

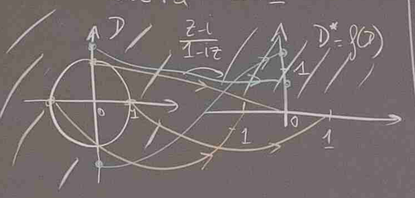


$f(-1) = -1 \quad \frac{-a+b}{-c+d} = -1$
$f(i) = 0 \quad \frac{ai+b}{ci+d} = 0$
$f(1) = 1 \quad \frac{a+b}{c+d} = 1$

$-a+b = c-d$
$a+b = c+d$
$ai+b = 0$

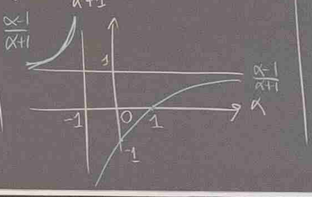
$2b = 2c$
$2a = 2d$
$b = -ai$

$f(z) = \dfrac{az-ai}{-aiz+a} = \dfrac{z-i}{-iz+1}$

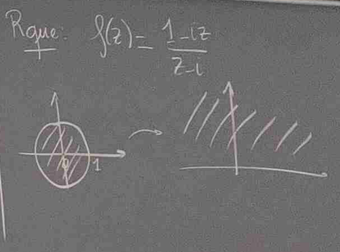


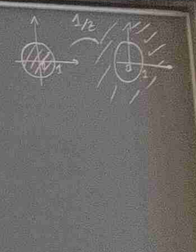
$z = a i \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad |a| > 1$

$f(z) = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1} i$



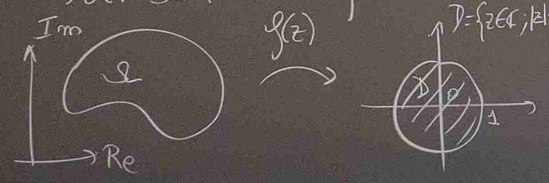
Rque : $f(z) = \dfrac{1-iz}{z-i}$





Pour info

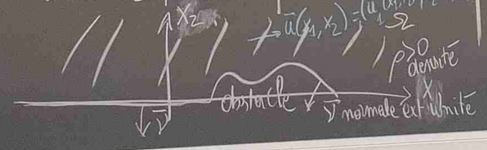
Thm de Riemann (B.S.)
Soit $\Omega \overset{\text{ouvert}}{\neq} \mathbb{C}$ simplement connexe



Il existe $f : \Omega \to D$ conforme

Appl à la mécanique des fluides

Soit $\Omega \neq \mathbb{C}$ simplement connexe



On cherche $\vec{u} : \Omega \to \mathbb{R}^2$
$(x_1, x_2) \to \vec{u}(x_1, x_2) : (u_1(x_1,x_2), u_2(x_1,x_2))$

et $p : \Omega \to \mathbb{R}$
$(x_1, x_2) \to p(x_1, x_2)$ tels que

$$\begin{cases} \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \vec{\nabla} p = \vec{0} & \text{dans } \Omega \quad \text{Euler incompressible 1753} \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \vec{u} \cdot \vec{\nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

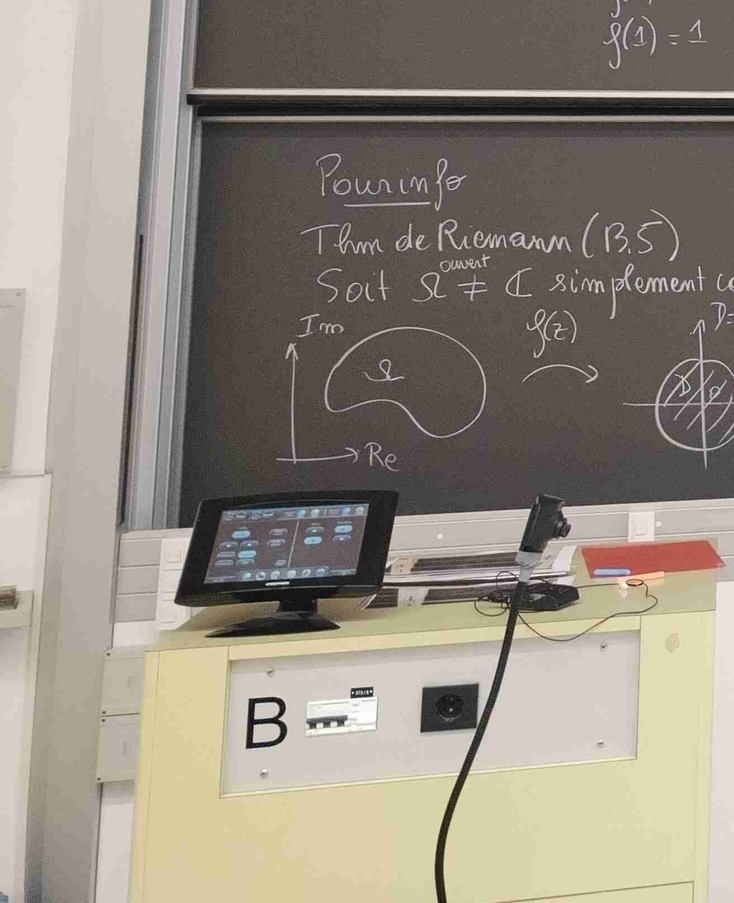
$$\begin{cases} \rho\, u_1 \partial_1 u_1 + u_2 \partial_2 u_1 + \partial_1 p = 0 & \Omega \ (1) \\ \rho\, u_1 \partial_1 u_2 + u_2 \partial_2 u_2 + \partial_2 p = 0 & \Omega \ (2) \\ \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 = 0 & \Omega \ (3) \\ u_1 \nu_1 + u_2 \nu_2 = 0 & \partial\Omega \ (4) \end{cases}$$

Si $\operatorname{rot} \vec{u} = 0 = (\partial_2 u_1 - \partial_1 u_2)$
alors (1) et (2) deviennent $\vec{\nabla}\left(p + \frac{1}{2}\rho \vec{u}\,\vec{u}\right) = 0$ (Cf exercice)

On cherche donc $\vec{u}$ tq
$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{u} = 0 & \Omega \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 & \Omega \\ \vec{u} \cdot \vec{\nu} = 0 & \partial\Omega \end{cases}$

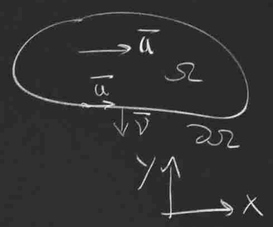
$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Puisque $\operatorname{rot} \vec{\nabla}\varphi = 0$ on cherche $\vec{u} = \vec{\nabla}\varphi$ (Potentiel). Puisque $\operatorname{div} \vec{u} = 0$
Finalement on cherche $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ tq
$\Delta\varphi = 0$ dans Ω et $\vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nu} = 0$ sur $\partial\Omega$



Chap 13

Appl. à la méc. des fluides



On cherche $\vec{u}: \Omega \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \to \vec{u}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$

tel que

$\operatorname{rot} \vec{u} = 0 \quad (= \partial_y u - \partial_x v)$ dans Ω

$\operatorname{div} \vec{u} = 0$ dans Ω

$\vec{u} \cdot \vec{\nu} = 0$ sur $\partial\Omega$

Puisque $\operatorname{rot} \vec{u} = 0$ on cherche $\vec{u} = \vec{\nabla}\phi$

$\vec{u}(x,y) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y), \frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y)\right)$

$(\vec{u} \in \mathcal{C}^1, \phi \in \mathcal{C}^2)$

$\operatorname{div} \vec{u} = 0 = \Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$

On cherche le potentiel

$\phi: \Omega \to \mathbb{R}$ tq

$(x,y) \to \phi(x,y)$

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 \text{ dans } \Omega \\ \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Si ϕ est solution, alors $\alpha\phi + \beta$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ est aussi solution !

Analyse complexe

Soit $f: \Omega \to \mathbb{C}$

$z \to f(z)$

$x+iy \to \phi(x,y) + i\psi(x,y)$



(On avait noté $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

Si f est holomorphe dans Ω

$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}$ et $\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$ $\quad \phi, \psi \in \mathcal{C}^\infty$

et on a $\Delta\phi = 0 = \Delta\psi$!

$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)$

on a aussi $\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\psi = 0$

$\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)$

ϕ : potentiel ($\vec{u} = \vec{\nabla}\phi$)

ψ : fonction courant (streamline)

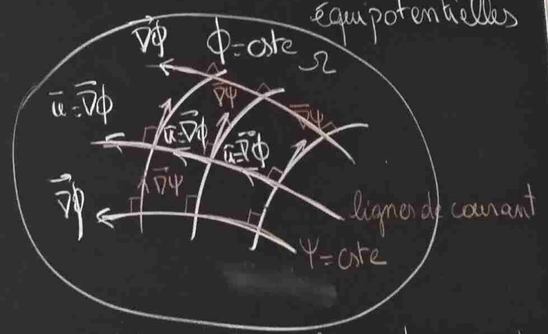
Equipotentielles : x, y tq $\phi(x,y) = \text{cste}$

paramétrisation $(x(t), y(t))$: $\phi(x(t), y(t)) = \text{cste}$

$\frac{d}{dt}\phi(x(t), y(t)) = 0$

$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x(t), y(t))\, x'(t) + \frac{\partial\phi}{\partial y}(x(t), y(t))\, y'(t) = 0$

tangente $(x'(t), y'(t)) \perp \vec{\nabla}\phi(x(t), y(t))$



$\vec{u}$ est tangent aux lignes de courant ($\psi = \text{cste}$)

Ligne de courant : (streamlines)

x, y tq $\psi(x,y) = \text{cste}$

Si $(x(t), y(t))$ est une param

alors $(x'(t), y'(t)) \perp \nabla\psi(x(t), y(t))$

(N'oublions pas que $\nabla\phi \cdot \nabla\psi = 0$!)

$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x(t),y(t))\, x'(t) + \frac{\partial\psi}{\partial y}(x(t),y(t))\, y'(t) = 0$

Trajectoires des particules fluides

$(x(t), y(t))$ tq (tout le temps)

$$\begin{cases} x'(t) = u(x(t), y(t)) = \frac{\partial\phi}{\partial x}(x(t), y(t)) \\ y'(t) = v(x(t), y(t)) = \frac{\partial\phi}{\partial y}(x(t), y(t)) \end{cases}$$

(étoilée position : intense)

Donc $\frac{\partial\psi}{\partial x}(x(t),y(t))\, x'(t) + \frac{\partial\psi}{\partial y}(x(t),y(t))\, y'(t)$

$= \frac{\partial\psi}{\partial y}(x(t),y(t)) \frac{\partial\phi}{\partial x}(x(t),y(t)) + \frac{\partial\psi}{\partial y}(x(t),y(t)) \frac{\partial\phi}{\partial y}(x(t),y(t))$

$= 0$ car $\nabla\phi \cdot \nabla\psi = 0$

Donc les trajectoires des particules fluides sont des lignes de courant

(pour $x, \vec{u}(x,y)$)

Exemple : $f(z) = z$ holomorphe dans $\mathbb{C}$?

$z = x+iy$ $\quad f(z) = x+iy$

donc $\phi(x,y) = x$ et $\psi(x,y) = y$

$\vec{u}(x,y) = \nabla\phi(x,y) = (1, 0)$

En effet : $z = re^{i\theta}$

$f(z) = z + \frac{1}{z} = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta}$

$= (r + \frac{1}{r})\cos\theta + i(r - \frac{1}{r})\sin\theta$

si $r = 1$ $\quad f(z) = 2\cos\theta$

si $r > 1$ $\quad f(z)$ ellipse

ϕ et ψ ? $\vec{u} = \nabla\phi$

$f(z) = x+iy$

$x+$

Montrer $f'(z) = 2(x - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2})$

$z(x,y)$

$f(z) = z^2$ holomorphe dans $\mathbb{C}$

$= (x+iy)^2$

$= x^2 - y^2 + i\,2xy$

$\phi(x,y) = x^2 - y^2$ $\quad \psi(x,y) = 2xy$

$\vec{u}(x,y) = \vec{\nabla}\phi(x,y) = (2x, -2y)$

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y > 0\}$

ou $= \{z \in \mathbb{C} ; \text{Im}\, z > 0\}$

Ecoulement horizontal uniforme

on a bien $\vec{u}.\vec{v} = 0$ sur $\partial\Omega$ equipot ligne de c. $\quad \phi(x,y) = \text{cste} : x = \text{cste}$

$\psi(x,y) = \text{cste} : y = \text{cste}$

$f(z) = z^4 = (x+iy)^4$

$\Omega = \{z \in \mathbb{C} ; 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$

Soit $f(z) = z + \frac{1}{z}$ $\quad z \neq 0$ Joukowsky

$f : D \to D^* = f(D)$ holomorphe (conforme)

$D = \{z \in \mathbb{C}, |z| > 1, \text{Im}\, z > 0\}$

f transforme le demi-cercle de centre 0 et rayon 1

...ines des particules
...gnes de courant

holomorphe dans $\mathbb{C}$

$\in \Omega$?

$+iy$

$= x$ et $\Psi(x,y) = y$

$) = (1,0)$

$\Omega = \{z \in \mathbb{C} ; \mathrm{Im} z > 0\}$

$\Phi = \text{cste}$

$\Psi = \text{cste}\ (= xy)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ sur $\partial\Omega$

$z > 0\}$

En effet : $z = re^{i\theta}$

$f(z) = z + \frac{1}{z} = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta}$

$= \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta$

si $r = 1$ $\quad f(z) = 2\cos\theta$

si $r > 1$ $\quad f(z)$: ellipse

ϕ et Ψ ? $\vec{u} = \vec{\nabla}\phi$

$f(z) = x + iy + \frac{1}{x+iy}\frac{x-iy}{x-iy}$

$= \underbrace{x + \frac{x}{x^2+y^2}}_{\phi(x,y)} + i\underbrace{\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)}_{\Psi(x,y)}$

$x, y \in D$: $\quad x^2 + y^2 > 1 \quad y > 0$

$\vec{u}(x,y) = \vec{\nabla}\phi(x,y) = \left(1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\ ,\ -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)$

$\vec{u}(0,y) = \left(1 + \frac{1}{y^2}, 0\right)$

$\vec{u}(0,1) = 2$

$\vec{u}(x,0) = \left(1 - \frac{1}{x^2}, 0\right)$

$\vec{u}(1,0)$

$f(z) = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2$

$f'(z) = 2\left(z + \frac{1}{z}\right)\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$

$= 2\left(z - \frac{1}{z^3}\right)$

$= 2\left(x+iy - \frac{1}{(x+iy)^3}\right)$

$= 2\left(x+iy - \frac{1}{x^3 - 3xy^2 + i(y^3 - 3x^2y)}\right)$

$f(z) = \phi + i\Psi$

$f'(z) = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\Psi}{\partial x}$

$= \frac{\partial\Psi}{\partial y} - i\frac{\partial\phi}{\partial y}$

$= u - iv$

On trouve $f'(z) = 2\left(x - \frac{x^3 - 3xy^2}{(x^2+y^2)^3}\right) + i\,2\left(y + \frac{3x^2y - y^3}{(x^2+y^2)^3}\right)$

$u(x,y) \qquad\qquad -v(x,y)$

$\vec{u}(0,y) = \left(0, 2\left(y - \frac{1}{y^3}\right)\right)$

$\vec{u}(x,0) = \left(2\left(x - \frac{1}{x^3}\right), 0\right)$

Perioden
Tableau

H
Li
Na
K
R

...nettre
...déchets
...EPFL ?
A l'EcoPoint
le plus proche

Chap 99 Méthodes variationnelles

Ritz-Galerkin ~1910

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ donné

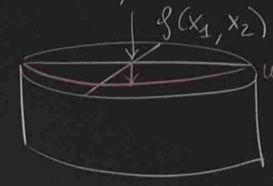
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ——

On cherche $u : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Ex : $\operatorname{div} \vec{E} = \rho \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V$

tambour, membrane élastique



$x = (x_1, x_2)$

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) + \frac{\partial u}{\partial x_2^2}(x_1, x_2)\right) = f(x_1, x_2)$$

$\forall (x_1, x_2) \in \Omega$

Formulation variationnelle (faible)

Soit $v : \Omega \to \mathbb{R}$ quelconque

$(x_1, x_2) \to v(x_1, x_2)$

On multiplie $-\Delta u = f$ par v et on intègre sur Ω

$$\iint_\Omega -\Delta u(x_1, x_2) v(x_1, x_2) \, dx_1 dx_2 = \iint_\Omega f(x_1, x_2) v(x_1, x_2) \, dx_1 dx_2$$

on intègre par partie

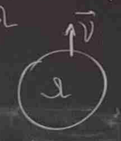
$\operatorname{div}(f \vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{\nabla} f + f \operatorname{div} \vec{F}$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \vec{F} = \vec{\nabla} u \qquad f = v$

$\operatorname{div}(v \vec{\nabla} u) = \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v + v \underbrace{\operatorname{div} \vec{\nabla} u}_{\Delta u}$

$$\iint_\Omega -\Delta u v \, dx_1 dx_2 = \iint_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx_1 dx_2$$



$$- \int_{\partial\Omega} v \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nu} \, ds$$

On choisit $v : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $v = 0$ sur $\partial\Omega$

On cherche

$u \in V$ tel que $\iint_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx_1 dx_2 = \iint_\Omega f v \, dx_1 dx_2 \quad \forall v \in V$

Ω ouvert borné $\subset \mathbb{R}^2$

$x(x_1, x_2) = \vec{x}$ → $\vec{\nu}$ → $\partial\Omega$

Etant donné $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\vec{x} \to f(\vec{x})$, $(x_1, x_2) \to f(x_1, x_2)$

On cherche $u : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

$$(1)\quad \begin{cases} -\Delta u(\vec{x}) = f(\vec{x}) & \forall \vec{x} \in \Omega \\ u(\vec{x}) = 0 & \forall \vec{x} \in \partial\Omega \end{cases}$$

On multiplie $-\Delta u = f$ par v où $v : \Omega \to \mathbb{R}$, $\vec{x} \to v(\vec{x})$ est quelconque

$$\iint_\Omega -\Delta u\, v\, dx_1 dx_2 = \iint_\Omega f v\, dx_1 dx_2$$

$\operatorname{div}(v\vec{\nabla}u) = v\Delta u + \vec{\nabla}v \cdot \vec{\nabla}u$

$$\iint_\Omega \vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla}v\, dx_1 dx_2 - \int_{\partial\Omega} \vec{\nabla}u \cdot \vec{\nu}\, v\, ds = \iint_\Omega f v\, dx_1 dx_2$$

On choisit $v = 0$ sur $\partial\Omega$ et on cherche

$u \in V$ tel que $\iint_\Omega \vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla}v\, dx_1 dx_2 = \iint_\Omega f v\, dx_1 dx_2$ $\forall v \in V$ (2)

Formulation variationnelle

où $V = \{ v : \Omega \to \mathbb{R}$ tel que $\iint_\Omega (v(x_1,x_2))^2 dx_1 dx_2 < +\infty$

$\iint_\Omega \|\vec{\nabla}v\|^2 dx_1 dx_2 < +\infty$ et $v = 0$ sur $\partial\Omega \}$

Vert un espace vectoriel normé complet (Hilbert)

$f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ tq $\iint_\Omega f^2 dx_1 dx_2$ et $\iint_\Omega g^2 dx_1 dx_2 < +\infty$

$\langle f, g \rangle = \iint_\Omega f(x_1,x_2) g(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2$

$\langle f, f \rangle = \iint_\Omega (f(x_1,x_2))^2 dx_1 dx_2$ norme

Inégalité de Cauchy Schwarz

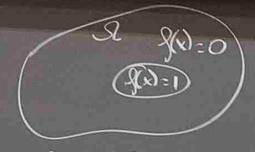
$\langle f, g \rangle \leq \langle f, f \rangle^{1/2} \langle g, g \rangle^{1/2}$

$\iint_\Omega f g\, dx_1 dx_2 \leq \left(\iint_\Omega f^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \left(\iint_\Omega g^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2}$

- Si $u, v \in V$ alors $\iint_\Omega \vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla}v\, dx_1 dx_2 < +\infty$

  Si $\iint_\Omega f^2 dx_1 dx_2 < +\infty$ alors $\iint_\Omega f v\, dx_1 dx_2 < +\infty$
- On a dém. que si u est solution de (1) ($u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$) alors u est solution de (2)
- Il existe des solutions de (2) qui ne sont pas solution de (1) ($u \notin \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$)

ex :



Puisque $f \notin \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$, $u \notin \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$

On dit que (2) est une formulation faible

- $\dim V = +\infty$ (*)

Méthode de Galerkin (Ritz)

Soit $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N \in V$ linéairement indép.

$\left(\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}, \text{si } \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i(\vec{x}) = 0 \ \forall \vec{x} \in \Omega \text{ alors } \alpha_1 = \dots = \alpha_N = 0 \right)$

Soit $V_N = \operatorname{vec}(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ (l'ens. des comb. lin de $\varphi_1, \dots, \varphi_N$) $\dim V_N = N$ $V_N \subset V$

On cherche $u_N \in V_N$ tel que

$$\iint_\Omega \vec{\nabla}u_N \cdot \vec{\nabla}v_N\, dx_1 dx_2 = \iint_\Omega f v_N\, dx_1 dx_2 \quad \forall v_N \in V_N \quad (3)$$



Trouver $u_N \in V_N$ solution de (3) est équivalent à résoudre un système linéaire N eq et N inconnues

En effet : $u_N \in V_N$: $u_N(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(\vec{x})$ $\forall \vec{x} \in \Omega$

où $u_j \in \mathbb{R}$, N inconnues

N équations : on choisit $v_N(\vec{x}) = \varphi_i(\vec{x})$ $i = 1, \dots, N$

$(\vec{\nabla}u_N(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N u_j \vec{\nabla}\varphi_j(\vec{x}))$

$$\iint_\Omega \sum_{j=1}^N u_j \vec{\nabla}\varphi_j(x_1,x_2) \cdot \vec{\nabla}\varphi_i(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2 = \iint_\Omega f(x_1,x_2)\varphi_i(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2 \quad i = 1, \dots, N$$

f_i

$$\sum_{j=1}^N u_j \underbrace{\iint_\Omega \vec{\nabla}\varphi_j(x_1,x_2) \cdot \vec{\nabla}\varphi_i(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2}_{A_{ij}} = f_i$$

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} u_j = f_i \quad i = 1, \dots, N$$

$A\vec{u} = \vec{f}$

Retour en arrière à (*) :

- Si on choisit $v = u$ dans (2)

$\underbrace{\iint_\Omega \|\vec{\nabla}u\|^2 dx_1 dx_2}_{\text{énergie de déformation}} = \underbrace{\iint_\Omega f u\, dx_1 dx_2}_{\text{travail des forces}}$

- La solution de (2), si elle existe, est unique

En effet, soit u_1 et u_2 2 solutions de (2)

on a : $\iint_\Omega \vec{\nabla}(u_1 - u_2) \cdot \vec{\nabla}v\, dx_1 dx_2 = 0$

on choisit $v = u_1 - u_2$ et on obtient

$\iint_\Omega \|\vec{\nabla}(u_1 - u_2)\|^2 dx_1 dx_2 = 0$

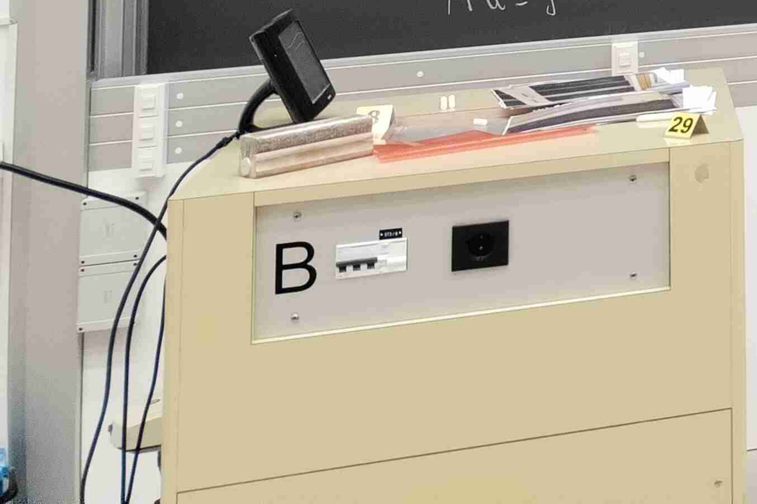
et donc $\|\vec{\nabla}(u_1 - u_2)(x_1,x_2)\|^2 = 0$ $\forall (x_1,x_2) \in \Omega$

— $\vec{\nabla}(u_1 - u_2)(x_1,x_2) = 0$ —

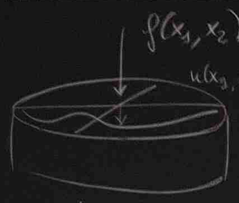
— $(u_1 - u_2)(x_1,x_2) =$ Constante

mais $(u_1 - u_2)(x_1,x_2) = 0$ $(x_1,x_2) \in \partial\Omega$

et donc Constante $= 0$

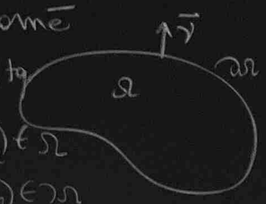


Méthode de Galerkin



Etant donné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert borné

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ on cherche $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tq



$$(1)\ \begin{cases} -\Delta u(x_1,x_2) = f(x_1,x_2) & \forall (x_1,x_2)\in\Omega \\ u(x_1,x_2) = 0 & \forall (x_1,x_2)\in\partial\Omega \end{cases}$$

mult. par $v : \Omega \to \mathbb{R}$ on intègre sur $\iint_\Omega dx_1 dx_2$ et

on obtient la formulation variationnelle (faible)

Trouver $u \in V$ tq $\iint_\Omega \underbrace{\vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla}v}_{\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}} dx_1 dx_2 = \iint_\Omega f v\, dx_1 dx_2 \quad \forall v \in V \quad (2)$

où $V = \left\{ v : \Omega \to \mathbb{R},\ \iint_\Omega (v(x_1,x_2))^2 dx_1 dx_2 < +\infty,\ \iint_\Omega \|\vec{\nabla}v\|^2 dx_1 dx_2 < +\infty,\ v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$ $\dim V = +\infty$

- Si on choisit $v = u$ dans (2) on obtient $\iint_\Omega \|\vec{\nabla}u\|^2 dx_1 dx_2 = \iint_\Omega f u\, dx_1 dx_2$
- Si u_1 et u_2 sont 2 solutions de (2) on a

$$\iint_\Omega \|\vec{\nabla}(u_1 - u_2)\|^2 dx_1 dx_2 = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}(u_1 - u_2) = \vec{0} \Rightarrow (u_1 - u_2 = 0 \text{ dans } \Omega)$$

- Si u est sol de (2) alors u minimise une énergie

$\forall v \in V$ on pose $J(v) = \frac{1}{2}\iint_\Omega \|\vec{\nabla}v\|^2 dx_1 dx_2 - \iint_\Omega f v\, dx_1 dx_2$

Montrons $J(u) \leq J(v)$ $\forall v \in V$

En effet $\forall v \in V$, on a $J(v) = J(v - u + u)$

$$= -\frac{1}{2}\iint_\Omega \vec{\nabla}(v-u+u)\cdot\vec{\nabla}(v-u+u)\, dx_1 dx_2 - \iint_\Omega f(v-u+u)\, dx_1 dx_2$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \iint_\Omega \|\vec{\nabla}u\|^2 dx_1 dx_2 - \iint_\Omega f u\, dx_1 dx_2 \right\} J(u)$$

$$+ \iint_\Omega \vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla}(v-u)\, dx_1 dx_2 - \iint_\Omega f(v-u)\, dx_1 dx_2$$

$$+ \frac{1}{2}\iint_\Omega \|\vec{\nabla}(v-u)\|^2 dx_1 dx_2 \geq 0$$

0 car u sol de (2)

Donc $\forall v \in V \quad J(v) \geq J(u)$ où u est sol de (2)

Méthode de Galerkin

Soit $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N \in V$ linéairement indép.

Soit $V_N = \text{vec}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$ $\dim V_N = N$

On cherche $u_N \in V_N$ tq $\iint_\Omega \vec{\nabla} u_N \cdot \vec{\nabla} v_N \, dx_1 dx_2 = \iint_\Omega f v_N \, dx_1 dx_2 \qquad (3) \qquad \forall v_N \in V_N$

Trouver u_N sol de (3) est équiv à résoudre un syst lin Neq, Ninc

Ninc : $u_N(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^{N} U_j \varphi_j(x_1, x_2)$ $U_j \in \mathbb{R}$

Neq : $v_N = \varphi_i \quad i = 1, \dots, N$

Système $A\vec{U} = \vec{F}$ (4)

où $\vec{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix}$ $\vec{F} = \begin{pmatrix} \iint_\Omega f(x_1,x_2)\varphi_1(x_1,x_2)\,dx_1dx_2 \\ \vdots \\ \iint_\Omega f(x_1,x_2)\varphi_N(x_1,x_2)\,dx_1dx_2 \end{pmatrix}$ $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ $A_{ij} = \iint_\Omega \vec{\nabla}\varphi_i(x_1,x_2) \cdot \vec{\nabla}\varphi_j(x_1,x_2)\,dx_1dx_2$

Question : $\forall \vec{F} \in \mathbb{R}^N \; \exists! \vec{U} \in \mathbb{R}^N$ tq $A\vec{U} = \vec{F}$? (5)

Oui car A est symétrique définie positive

Déf. A s.d.p si $\forall \vec{V} \in \mathbb{R}^N \quad \vec{V}^T A \vec{V} = \langle \vec{V}, A\vec{V} \rangle \geq 0$ ($A = A^T$)

et $\vec{V}^T A \vec{V} = 0 \Leftrightarrow \vec{V} = \vec{0}$

Si A est s.d.p alors $\ker A = \vec{0}$ et (5) est vraie

$\left(\forall \vec{V} \in \mathbb{R}^N \quad A\vec{V} = \vec{0} \Rightarrow \langle \vec{V}, A\vec{V} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{V} = \vec{0} \right)$

Montrons A est s.d.p

Soit $\vec{V} \in \mathbb{R}^N$ on a

$\vec{V}^T A \vec{V} = \langle \vec{V}, A\vec{V} \rangle = \sum_{i=1}^{N} V_i (A\vec{V})_i$

$= \sum_{i=1}^{N} V_i \sum_{j=1}^{N} A_{ij} V_j$

$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} V_i V_j A_{ij}$

$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} V_i V_j \iint_\Omega \vec{\nabla}\varphi_i(x_1,x_2) \cdot \vec{\nabla}\varphi_j(x_1,x_2)\,dx_1dx_2$

$= \iint_\Omega \underbrace{\sum_{i=1}^{N} V_i \vec{\nabla}\varphi_i(x_1,x_2)}_{\vec{\nabla} v_N(x_1,x_2)} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{N} V_j \vec{\nabla}\varphi_j(x_1,x_2)}_{\vec{\nabla} v_N(x_1,x_2)} dx_1 dx_2$

où $v_N(x_1,x_2) = \sum_{i=1}^{N} V_i \varphi_i(x_1,x_2) \in V_N$

On a montré $\langle \vec{V}, A\vec{V} \rangle = \iint_\Omega \|\vec{\nabla} v_N(x_1,x_2)\|^2 dx_1 dx_2 \geq 0$

De plus si

$0 = \langle \vec{V}, A\vec{V} \rangle \Rightarrow \vec{\nabla} v_N(x_1,x_2) = 0$

$\Rightarrow v_N(x_1,x_2) = \text{cste}$

mais $v_N = 0$ sur $\partial\Omega$

donc $v_N(x_1,x_2) = 0$

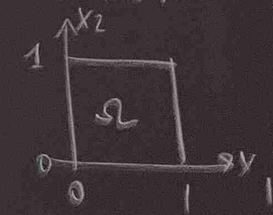
$v_N(x_1,x_2) = \sum_{i=1}^{N} V_i \varphi_i(x_1,x_2) = 0$

mais $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ sont lin. indép

et donc $V_1 = V_2 = \dots = V_N$ $(\text{ie } \vec{V} = \vec{0})$

Choix de $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$?

$\Omega = (0,1)^2 = (0,1) \times (0,1)$ (ou rectangle)



$i_1 = 1, \dots, L \quad i_2 = 1, \dots, L$

$\varphi_i(x_1,x_2) = \sin(i_1 \pi x_1) \sin(i_2 \pi x_2)$

$i = L(i_2 - 1) + i_1 \quad i = 1, \dots, L^2 = N$

$\sin(\pi x)$

$\sin 3\pi x$

x_1

Exercice : $\begin{cases} -u''(x) = f(x) & 0<x<1 \\ u(0)=0 \\ u(1)=0 \end{cases}$

$f(x)$ ↓ corde élastique

$u(x)$ ↓

$x=0$ $x=1$

$\varphi_i(x) = \sin(i\pi x)$ $i=1,\dots,N$

Calculs explicites

Séries de Fourier

$\varphi_i(x_1,x_2) = x_1^{i_1}(1-x_1)\, x_2^{i_2}(1-x_2)$

$i_1 = 1,\dots,L$ $i_2 = 1,\dots,L$

$i = L(i_2-1)+i_1$ $(i=1,\dots,L^2=N)$

Si Ω est quelconque

Eléments finis

Ω

i^e sommet intérieur coord (x_1^i, x_2^i) $i=1,\dots,N$

$\varphi_i(x_1,x_2)$ est linéaire

$\varphi_i(x_1^i, x_2^i) = 1$

isoligne $\varphi_i(x_1,x_2) = 1/2$

$\varphi_i(x_1,x_2) = 0$

x_2

x_1

Support de $\varphi_i(x_1,x_2)$

$\varphi_i(x_1^i, x_2^i) = 1$

$\varphi_i(x_1,x_2)$ pyramide

x_2

x_1

Avantage : Ω quelconque

Ω est creuse $\triangle$

(beaucoup de zéros)

sommet n° j

sommet n° i

support de φ_i

Support de φ_j

i, j ne sont pas voisins (& même arête)

$A_{ij} = \iint_\Omega \vec{\nabla}\varphi_i(x_1,x_2)\cdot\vec{\nabla}\varphi_j(x_1,x_2)\,dx_1dx_2 = 0$!

Généralisation

Etant donné $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $a : \Omega \to \mathbb{R}$ et $c : \Omega \to \mathbb{R}$

$a(x_1,x_2) > 0$ $c(x_1,x_2) \geq 0$

on cherche $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tq

$\begin{cases} -\operatorname{div}(a\vec{\nabla}u) + cu = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$

$A_{ij} = \iint_\Omega \vec{\nabla}\varphi_i(x_1,x_2)\cdot\vec{\nabla}\varphi_j(x_1,x_2)\,dx_1dx_2$

$\vec{\nabla} v_N(x_1,x_2) \in V_N$

$\varphi_i(x_1,x_2) = \sin(i_1\pi x_1)\sin(i_2\pi x_2)$

$i=1,\dots,L^2=N$

(ou rectangle)

Periodensystem der Elemente
Tableau périodique des éléments

Rh

Lanthaniden
Lanthanides
Lanthanide
Lantánidos

Actiniden
Actinides
Actinides
Actinidos

À l'EcoPoint le plus proche

Formulation variationnelle :

Soit $v : \Omega \to \mathbb{R}$ on a

$$\iint_\Omega \left(-\operatorname{div}(a(x_1,x_2)\vec{\nabla}u(x_1,x_2))\right)v(x_1,x_2) + c(x_1,x_2)u(x_1,x_2)v(x_1,x_2)\Big)dx_1dx_2 = \iint_\Omega f(x_1,x_2)v(x_1,x_2)\,dx_1,dx_2$$

$\operatorname{div}(f\vec{F}) = f\operatorname{div}\vec{F} + \vec{F}\cdot\vec{\nabla}f \qquad \vec{F} = a\vec{\nabla}u \quad f = v$

$\operatorname{div}(a\vec{\nabla}u\,v) = v\operatorname{div}(a\vec{\nabla}u) + a\vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v$

$$\iint_\Omega a(x_1,x_2)\vec{\nabla}u(x_1,x_2)\cdot\vec{\nabla}v(x_1,x_2)dx_1dx_2 - \int_{\partial\Omega} v\,a\vec{\nabla}u\cdot\vec{n}\,ds + \iint_\Omega cuv\,dx_1dx_2 = \iint_\Omega fv\,dx_1dx_2$$

Méthode de Galerkin

Donné $f : \Omega \to \mathbb{R}$

Ω , $\bar{x} = (x_1, x_2)$

$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$

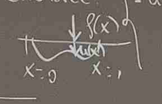
Cherché $u : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad \Delta u = \operatorname{div} \vec{\nabla} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$

Formulation variationnelle

Méthode de Galerkin

Système linéaire

exercice : $\begin{cases} -u''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$



Aujourd'hui : Donné $f : \Omega \to \mathbb{R}$

$a : \Omega \to \mathbb{R}$

$c : \Omega \to \mathbb{R}$

Cherche $u : \Omega \to \mathbb{R}$

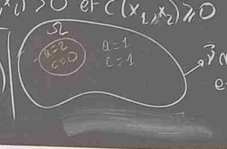
$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(a(x_1,x_2)\vec{\nabla}u(x_1,x_2)\right) + c(x_1,x_2)\,u(x_1,x_2) = f(x_1,x_2) & \forall (x_1,x_2) \in \Omega \\ u(x_1,x_2) = 0 & \forall (x_1,x_2) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

$a, c : \Omega \to \mathbb{R}$ continues par morceaux

$a(x_1,x_2) > 0$ et $c(x_1,x_2) \geq 0 \quad \forall (x_1,x_2) \in \Omega$

$\operatorname{div}(a\vec{\nabla}u) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(a\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(a\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$

$|\vec{\nabla}u|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2$



$\vec{n}$ normale ext unité

Formulation variationnelle

on multiplie par $v(x_1,x_2)$ $(v : \Omega \to \mathbb{R})$ et on $\iint_\Omega dx_1 dx_2$

$$\iint_\Omega -\operatorname{div}\left(a\vec{\nabla}u\right) v\, dx_1 dx_2 = \iint_\Omega a\vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla}v\, dx_1 dx_2 - \int_{\partial\Omega} a\, v\, \vec{\nabla}u \cdot \vec{n}\, d\Gamma$$

On choisit $v : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $v = 0$ sur $\partial\Omega$

et on cherche $u \in V$ tq

$$\iint_\Omega a\vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v\,dx_1dx_2 = \iint_\Omega f v\,dx_1dx_2 \quad \forall v \in V \quad (2)$$

où $V = \{v : \Omega \to \mathbb{R},\ \iint_\Omega v^2 dx_1dx_2 < +\infty,\ \iint_\Omega |\vec{\nabla}v|^2 dx_1dx_2 < +\infty,\ v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$

Si c est cont / morceaux $\left|\iint_\Omega c\,u\,v\,dx_1dx_2\right| \leq \iint_\Omega |c\,u\,v|\,dx_1dx_2$

$\leq \max_{(x_1,x_2)\in\Omega} |c(x_1,x_2)| \iint_\Omega |u v|\,dx_1dx_2$

$\leq \text{cste} \left(\iint_\Omega u^2 dx_1dx_2\right)^{1/2}\left(\iint_\Omega v^2 dx_1dx_2\right)^{1/2}$

$< +\infty$ si $u, v \in V$

De même si a est cont / morceaux

$\left|\iint_\Omega a\vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v\,dx_1dx_2\right| \leq \iint_\Omega |a\vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v|\,dx_1dx_2$

$\leq \max_\Omega |a| \iint_\Omega |\vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v|\,dx_1dx_2$

$\leq \text{cste} \left(\iint_\Omega |\vec{\nabla}u|^2 dx_1dx_2\right)^{1/2}\left(\iint_\Omega |\vec{\nabla}v|^2 dx_1dx_2\right)^{1/2}$

$< +\infty$ si $u, v \in V$

$\vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}$

Si solution de (2), si elle existe, est unique

En effet si u_1 et u_2 sont 2 solutions de (2)

on a $\iint_\Omega a\vec{\nabla}(u_1-u_2)\cdot\vec{\nabla}v\,dx_1dx_2 + \iint_\Omega c(u_1-u_2)v\,dx_1dx_2 = 0 \quad \forall v \in V$

on choisit $v = u_1 - u_2$ et on a

$\iint_\Omega a|\vec{\nabla}(u_1-u_2)|^2 dx_1dx_2 + \iint_\Omega c(u_1-u_2)^2 dx_1dx_2 = 0$ et donc $\underbrace{a}_{>0}|\vec{\nabla}(u_1-u_2)|^2 = 0$ dans Ω

$\vec{\nabla}(u_1-u_2) = \vec{0}$ et donc $u_1 - u_2 = \text{cste}$

mais $u_1 = u_2 = 0$ sur $\partial\Omega$

donc $u_1 - u_2 = 0$ dans Ω

Méthode de Galerkin

Soit $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N \in V$ linéairement indép.

$V_N = \text{vec}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$ $\dim V_N = N$ $V_N \subset V$

On cherche $u_N \in V_N$ tq

$$\iint_\Omega a\vec{\nabla}u_N\cdot\vec{\nabla}v_N\,dx_1dx_2 + \iint_\Omega c\,u_N v_N\,dx_1dx_2 = \iint_\Omega f v_N\,dx_1dx_2 \quad \forall v_N \in V_N \quad (3)$$

$u_N(x_1,x_2) = \sum_{j=1}^N \underbrace{U_j}_{\in\mathbb{R}}\ \varphi_j(x_1,x_2)$ $\quad v_N = \varphi_i$ $i = 1,\dots,N$

$$\iint_\Omega a \sum_{j=1}^N U_j \vec{\nabla}\varphi_j\cdot\vec{\nabla}\varphi_i\,dx_1dx_2 + \iint_\Omega c\sum_{j=1}^N U_j\varphi_j\varphi_i\,dx_1dx_2 = \iint_\Omega f\varphi_i\,dx_1dx_2$$

$$\sum_{j=1}^N U_j \underbrace{\left(\iint_\Omega a\vec{\nabla}\varphi_j\cdot\vec{\nabla}\varphi_i\,dx_1dx_2 + \iint_\Omega c\varphi_j\varphi_i\,dx_1dx_2\right)}_{A_{ij}} = \underbrace{\iint_\Omega f\varphi_i\,dx_1dx_2}_{F_i} \quad i = 1,\dots,N$$

$\sum_{j=1}^N A_{ij}U_j = F_i \quad i = 1,\dots,N$

$A\vec{U} = \vec{F}$

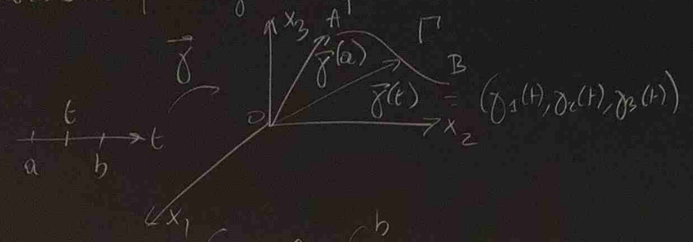
On peut démontrer que A est sym. def. positive ($\text{si } a \geq 0 \text{ et } c \geq 0$)

et donc $\forall \vec{F} \in \mathbb{R}^N$ $\exists!\, \vec{U} \in \mathbb{R}^N$ tq $A\vec{U} = \vec{F}$

$(\forall \vec{V} \in \mathbb{R}^N \quad \vec{V}^t A\vec{V} = \langle \vec{V}, A\vec{V}\rangle \geq 0$ $\quad = 0 \Leftrightarrow \vec{V} = \vec{0})$



Γ courbe simple régulière (par morceaux)



$\vec{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ C^0 $\int_\Gamma f \, dl = \int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) \, \|\vec{\gamma}'(t)\| \, dt$

$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ C^0 $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) \, dt$

$\int_\Gamma \operatorname{grad} f \cdot d\vec{l} = f(B) - f(A)$

$\frac{d}{dt}\left(f(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))\right)$



$\vec{\gamma}'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))$

$\vec{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$

normale ext unité $\vec{\nu}(t) = \dfrac{(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))}{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}}$



$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^1

$\iint_A \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2) \, dx_1 dx_2 = \int_{\partial A} f \nu_i \, ds \qquad i = 1, 2$

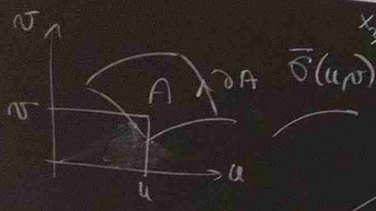
$\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ C^1 $\iint_A \operatorname{div} \vec{F} \, dx_1 dx_2 = \int_{\partial A} \vec{F} \cdot \vec{\nu} \, dl$

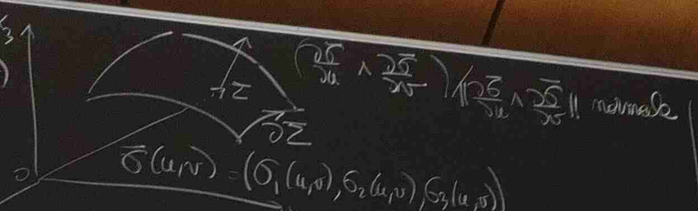
$\int_{\partial A} \vec{F} \cdot \vec{\nu} \, dl = \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dfrac{(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))}{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}} \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} \, dt$

∂A param $\vec{\gamma}(t)$

$\iint_A \operatorname{rot} \vec{F} \, dx_1 dx_2 = \int_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{l}$ (*)

$\operatorname{rot} \vec{F} \rightsquigarrow \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}$





$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$

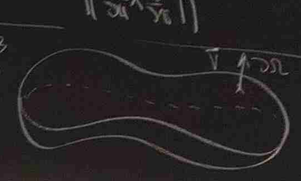
$\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$

$$\iint_\Sigma f\,ds=\iint_A f(\vec{\sigma}(u,v))\left\|\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v}(u,v)\right\|du\,dv$$

$$\iint_\Sigma \vec{F}\cdot d\vec{s}=\iint_A \vec{F}(\vec{\sigma}(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v}(u,v)\right)du\,dv$$

$$\iint_\Sigma \vec{F}\cdot d\vec{s}=\iint_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{\nu}\,ds$$ Champ scalaire

où $\vec{\nu}=\dfrac{\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u}\wedge\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v}}{\left\|\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u}\wedge\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v}\right\|}$



$\vec{\nu}$ normale extérieure unitaire de $\partial\Omega$

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$

$\iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_1dx_2dx_3=\iint_{\partial\Omega} f\nu_i\,ds$ $i=1,2,3$

$\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^1$

$\iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{F}\,dx_1dx_2dx_3=\iint_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot\vec{\nu}\,ds$

Σ surface de $\mathbb{R}^3$ régulière (par morceaux)

bord courbe fermée $\partial\Sigma$ orientation:

sens parcours $\partial\Sigma$ induit par celui de ∂A

$$\iint_\Sigma \vec{\operatorname{rot}}\,\vec{F}\cdot d\vec{s}=\int_{\partial\Sigma}\vec{F}\cdot d\vec{l}$$

Si $\Sigma=A\subset\mathbb{R}^2$ $\vec{F}(x_1,x_2,x_3)=(F_1(x_1,x_2),F_2(x_1,x_2),0)$

on retrouve $(*)$

Analogie complexe

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

$z=x+iy$

$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$

f holomorphe dans $\Omega\subset\mathbb{C}$ ssi

$\forall z_0\in\Omega$ $\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in\Omega}}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe, la même $\forall z\to z_0$

f holomorphe dans $\Omega\Leftrightarrow u,v\in\mathcal{C}^1$ $(\mathcal{C}^\infty)$

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ dans Ω

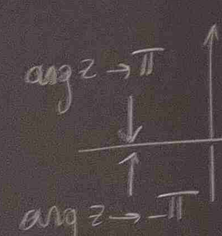
$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$ $\forall z\in\Omega$

$z=x+iy$

Ex. e^z holomorphe dans $\mathbb{C}$

$\log z=\log|z|+i\arg z$ $-\pi<\arg z\in\pi$



$z=|z|e^{i\arg z}$

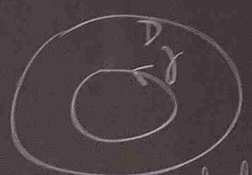
$z\neq 0$

$\log z$ holomorphe dans $\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C};\ \operatorname{Im}z=0,\ \operatorname{Re}z\leq 0\}$

$e^{\log z}=e^{\log|z|+i\arg z}=|z|e^{i\arg z}=z$

$D\subset\mathbb{C}$ simplement connexe

$f:D\to\mathbb{C}$ holomorphe



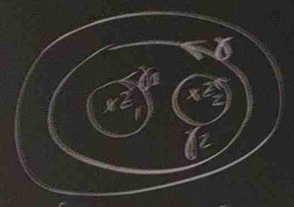
$\gamma\subset D$ simple fermée rect. par morceaux

$\int_\gamma f(z)dz=0$ (Thm Cauchy)

γ param $\gamma(t)=\underbrace{\alpha(t)}_{\in\mathbb{R}}+i\underbrace{\beta(t)}_{\mathbb{R}}$ $a\leq t\leq b$

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

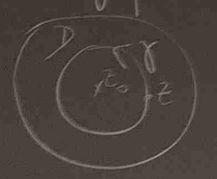
D simplement connexe
$z_1, z_2 \in D$



$f : D \setminus \{z_1, z_2\} \to \mathbb{C}$ holomorphe

$\gamma \subset D$ simple fermée rég. par morceaux
$z_1, z_2 \in \operatorname{int}\gamma$
$\gamma_1, \gamma_2 \in \operatorname{int}\gamma$
$z_1 \in \operatorname{int}\gamma_1$
$z_2 \in \operatorname{int}\gamma_2$
on a: $\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$

Formule int de Cauchy
D simplement connexe
$f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe
$\gamma \subset D$ courbe simple fermée rég. par morceaux
$z_0 \in \operatorname{int}\gamma$





on a $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$

Dem. $z \to \frac{f(z)}{z - z_0}$ est holomorphe dans $D \setminus \{z_0\}$

$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 2\pi i f(z_0)$

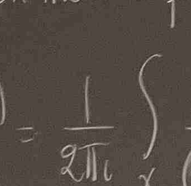
param de γ_ε : $\gamma(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}$

par induction on montre que

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

et donc f infiniment dérivable

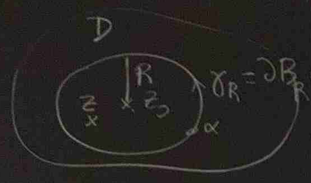
Série de Taylor



$D \subset \mathbb{C}$ simplement connexe $f_{D \to \mathbb{C}}$ holomorphe
$z_0 \in D$
R telque $B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} ; |z - z_0| < R\} \subset D$

$\forall z \in B_R(z_0)$ on a : $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$

$\forall z \in \mathbb{C}$ $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$



$f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe

Formule int de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z} d\alpha$$

$$\frac{1}{\alpha - z} = \frac{1}{\alpha - z_0 + z_0 - z}$$

mais $|z - z_0| < |\alpha - z_0|$ ie $\frac{|z - z_0|}{|\alpha - z_0|} < 1$

$$\frac{1 - q^{m+1}}{1 - q} = 1 + q + q^2 + \dots + q^m \quad \forall q \in \mathbb{C}$$

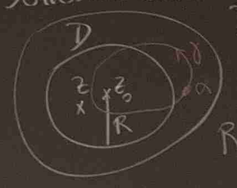
$|q| < 1$ $m \to \infty$: $\frac{1}{1-q} = \sum_{m=0}^{\infty} q^m$

$$\frac{1}{\alpha - z} = \frac{1}{(\alpha - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{\alpha - z_0}\right)} = \frac{1}{\alpha - z_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^m}{(\alpha - z_0)^m}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^m}{(\alpha - z_0)^m} d\alpha$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)^{m+1}} d\alpha \right)}_{\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}} (z - z_0)^m$$

Séries de Laurent



D simplement connexe

$f : D \setminus \{z_0\}$ holomorphe

R tel que $B_R(z_0) \subset D$

$\forall z \in B_R(z_0)$ on a $f(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m (z - z_0)^m$

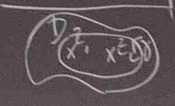
où $c_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)^{m+1}} d\alpha$

$$f(z) = \underbrace{\dots + \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0}}_{\text{partie sing}} + \underbrace{c_0 + c_1 (z - z_0) + \dots c_n (z - z_0)^n + \dots}_{\text{partie rég.}}$$

si $f : D \to \mathbb{C}$ holom $c_{-m} = 0$ mention $m \geq 1$

ex : $e^{1/z}$ $z \neq 0$ $e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \dots + \frac{1}{m! z^m} + \dots$

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\alpha) d\alpha = \operatorname{Res}_{z_0} f$$



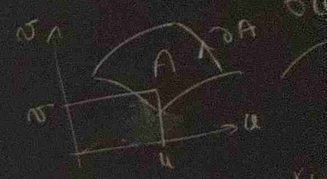
il existe une formule pour calculer $\operatorname{Res}_{z_0}(f)$ si z_0 est un pôle d'ordre m

application théorème résidu

$D \subset \mathbb{C}$ $f : D \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$ holomorphe

$z_1, z_2, \dots, z_m \in \operatorname{int} \gamma_m$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Res}_{z_i}(f)$$



$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$

$\Xi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$

Σ surface de $\mathbb{R}$

bord courbe fer

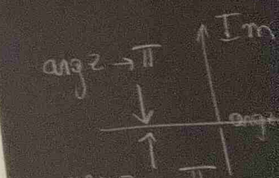
sens parcours

$\iint \overrightarrow{rot}$

Σ

si $\overline{\Sigma} = AC$

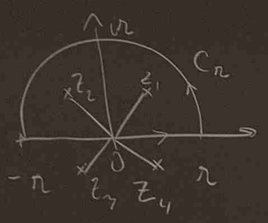
on



$z \neq 0$

$\log z$

$e^{\log z}$



$z^4 = -1$

$z^4 = r^4 e^{i4\theta}$

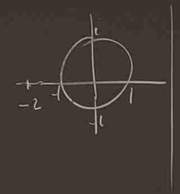
$\gamma(\theta) = re^{i\theta} \quad 0 \le \theta \le \pi$

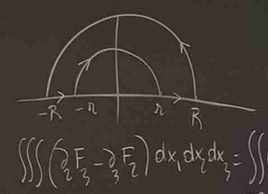
$$\left| \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^4} \right| = \left| \int_0^\pi \frac{ire^{i\theta}}{1+r^4 e^{i4\theta}} \right| \le \int_0^\pi \frac{r}{|1+r^4 e^{i4\theta}|} d\theta \le \int_0^\pi \frac{r}{r^4-1} d\theta$$

$$r^4 = |r^4 e^{i4\theta}| = |r^4 e^{i4\theta} + 1 - 1| \le |r^4 e^{i4\theta} + 1| + 1$$

$$|1 + r^4 e^{i4\theta}| \ge r^4 - 1$$

$$\frac{1}{|1+r^4 e^{i4\theta}|} \le \frac{1}{r^4-1}$$





$$\iint_{\partial\Omega} (\vec{v} \wedge \vec{F}) ds = \iint_{\Omega} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} ds$$

$$\iiint_{\Omega} \left(\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} \left(F_3 \gamma_2 - F_2 \gamma_3 \right) ds$$

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} (v^2) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} 2v \frac{\partial v}{\partial x_1} dx_1 dx_2$$

$$0 = \int_{\partial\Omega} v^2 \gamma_1 ds = \text{——}$$



