Exercice 1.
Exercice 9.1 du livre

Exercice 2.
Exercice 9.4 du livre

Exercice 3.
Exercice 9.6 du livre.
Remarque: Pour le point (i), on admet le résultat suivant: Si $f = u + iv$ est holomorphe, u et v sont $\mathcal{C}^2$.

Exercice 4.
Exercice 9.10 du livre
Remarque: On admet le résultat suivant: Si $f = u + iv$ est holomorphe, u et v sont $\mathcal{C}^2$.

Exercice 5.
Montrer que, si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe, alors

$$\Delta(|f|^2) = 4|f'|^2.$$

Exercice 6.

- Soit D un domaine simplement connexe et soit $F : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $\gamma : [a, b] \to D$ une courbe régulière.
  Montrer que
  $$\int_\gamma F'(z)\ dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$
- En déduire que, si γ est une courbe régulière et fermée, alors
  $$\int_\gamma z^2\ dz = 0.$$

Indication : Si $z = x + iy$, $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ et $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, montrer que

$$\begin{aligned}\int_\gamma F'(z)\ dz = &\int_a^b \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha(t), \beta(t))\alpha'(t) + \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha(t), \beta(t))\beta'(t)\ dt \\ &+ i\int_a^b \frac{\partial v}{\partial x}(\alpha(t), \beta(t))\alpha'(t) + \frac{\partial v}{\partial y}(\alpha(t), \beta(t))\beta'(t)\ dt\end{aligned}$$

et calculer $\dfrac{d}{dt}(u(\alpha(t), \beta(t)))$, $\dfrac{d}{dt}(v(\alpha(t), \beta(t)))$.