

Exercice 1.

Soit $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \in C^1$ telle que $\overrightarrow{\text{rot}}F = 0$. Soit $P = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et soit $\Gamma = \overrightarrow{OP}$ paramétrée par $\gamma(t) = (tx_1, tx_2, tx_3)$. Montrer que f définie par

$$f(x_1, x_2, x_3) = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

est telle que $F(x_1, x_2, x_3) = \text{grad}f(x_1, x_2, x_3)$.

Exercice 2.

Soient $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{R}^3$ non alignés et soit Σ le parallélogramme formé à partir de ces trois points. On note $\sigma(u, v) = \overrightarrow{OQ_1} + u\overrightarrow{Q_1Q_2} + v\overrightarrow{Q_1Q_3}$, $0 \leq u, v \leq 1$ une paramétrisation de Σ . Pour $u_i = i/N$, $i = 0, \dots, N$, $v_j = j/N$, $j = 0, \dots, N$, on note $P_{i,j} = \sigma(u_i, v_j)$. Soit $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ constante par morceaux sur chaque parallélogramme formé des quatre points $P_{i,j}, P_{i+1,j}, P_{i,j+1}, P_{i+1,j+1}$. On dénote par $P_{i+1/2, j+1/2}$ le barycentre du parallélogramme et $f(P_{i+1/2, j+1/2})$ la valeur de f correspondante. Montrer que

$$\iint_{\Sigma} f ds = \sum_{i,j=0}^{N-1} f(P_{i+1/2, j+1/2}) \|\overrightarrow{P_{i,j}P_{i+1,j}} \wedge \overrightarrow{P_{i,j}P_{i,j+1}}\|.$$

Exercice 3 (Examen 2024).

Soient $k \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$, $T \in C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ et $f \in C^0(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$. On suppose que pour tout domaine régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, de bord $\partial\Omega$ et de normale extérieure unité $\vec{\nu}$, on a

$$\iint_{\partial\Omega} -k \overrightarrow{\text{grad}}T \cdot \vec{\nu} ds = \iiint_{\Omega} f dx_1 dx_2 dx_3.$$

On en déduit que dans \mathbb{R}^3 , on a (plusieurs réponses possibles):

- $-k\Delta T = f$.
- $-\text{div}(k \overrightarrow{\text{grad}}T) = f$.
- $-k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \right) = f$.
- $-\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) \right) = f$.

Exercice 4.

Soient la surface $\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq x_1, x_3 \leq 1, x_2 = 0\}$ et un champ vectoriel

$$\vec{F} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \vec{x} \mapsto & \vec{F}(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), F_2(\vec{x}), F_3(\vec{x})) \end{cases}$$

de classe \mathcal{C}^1 . Démontrer le théorème de Stokes dans ce cas particulier.

Exercice 5.

Montrer que si $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sont continues en $z_0 \in \Omega$, alors fg l'est aussi (utiliser la définition de continuité avec les ϵ et δ).

Exercice 6.

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ et soient u et v ses parties réelles et imaginaires. Montrer que f est continue en $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si u et v sont continues en (x_0, y_0) .

Exercice 7.

Soient $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphes en $z_0 \in \Omega$. Montrer que fg est holomorphe en z_0 et $(fg)' = f'g + fg'$.

Exercice 8.

Exercice 9.13 du livre