

Exercice 1.

Soit $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} (x_1, x_2, x_3).$$

Soit Σ la sphère centrée en 0 et de rayon 1. Déterminez quelles affirmations sont correctes.

1. $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = \vec{0}, \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}.$
2. $\text{div } \vec{F}(x_1, x_2, x_3) = 0, \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}.$
3. $\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{ds} = 4\pi.$
4. $\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{ds} = 0.$
5. S'il existe $\vec{\psi} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{F} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{\psi}$, alors $\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{ds} = 0.$
6. Il n'existe pas de $\vec{\psi} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{F} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{\psi}.$

Exercice 2.

Exercice 7.1 du livre.

Exercice 3.

Exercice 7.8 du livre.

Exercice 4 (Ruban de Möbius).

On considère la surface $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ paramétrisée par

$$\vec{\sigma}(u, v) = \left(\left(1 + \frac{u}{2} \cos \frac{v}{2}\right) \cos v, \left(1 + \frac{u}{2} \cos \frac{v}{2}\right) \sin v, \frac{u}{2} \sin \frac{v}{2} \right),$$

où $u \in [-1, 1]$ et $v \in [0, 2\pi]$. La Figure 1 donne une illustration de cette surface appelée ruban de Möbius. On considère le champs vectoriel

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, 0 \right).$$

1. Montrer que $\iint_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{F} \cdot \vec{ds} = 0.$
2. Montrer que $\int_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = 4\pi.$
3. Pourquoi le théorème de Stokes ne s'applique pas dans ce cas? On pourra calculer la normale à la surface et observer son comportement après un tour sur le ruban de Möbius, c'est à dire observer le comportement de la normale en $(u, v) = (0, 0)$ et en $(u, v) = (0, 2\pi)$, par exemple.

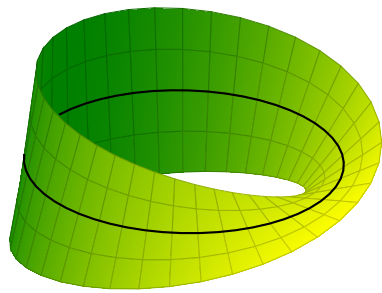


Figure 1: Illustration d'un ruban de Möbius.