Exercice 1.
Exercice 5.2 du livre.

Exercice 2.
Exercice 5.3 du livre.

Exercice 3.
Exercice 5.6 du livre.

Exercice 4.
Exercice 5.7 du livre.

Exercice 5.
On suppose l'espace $\mathbb{R}^3$ occupé par un fluide de masse volumique ρ constante. Soit un volume de frontière Σ immergé dans ce fluide. La force totale F (force d'Archimède) exercée sur le volume par un champ de pression p est donnée par

$$F = \left(\iint_\Sigma -p\nu_1 \; ds, \iint_\Sigma -p\nu_2 \; ds, \iint_\Sigma -p\nu_3 \; ds \right)$$

où $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ est la normale unité à Σ dirigée vers l'extérieure du volume et $p(x_1, x_2, x_3) = -\rho g x_3 + C$, avec C une constante arbitraire. Calculer la force totale F exercée sur une sphère de rayon R immergée dans ce fluide.

Exercice 6.
On considère Σ la surface composée des faces du cube unité $[0,1]^3$, voir exemple 8.21 du livre. Soit $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, défini par $\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, x_1, 0)$. Montrer, sans paramétriser Σ, que

$$\iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{rot}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = 0.$$

Remarque: On verra plus tard que le théorème de Stokes donne

$$\iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{rot}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \int_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell},$$

où $\partial\Sigma$ est le bord de Σ. Ici, $\partial\Sigma = \varnothing$, de sorte que $\int_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = 0$.