Exercice 1.
Exercice 4.7 du livre.

Exercice 2.
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine régulier et $f, g \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$. Soit également $a \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ et $a_0 > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in \Omega$, $a(x,y) \geq a_0$. Montrer que le problème

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\left(a(x,y)\overrightarrow{\operatorname{grad}}(u(x,y))\right) &= f(x,y) \qquad && (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) &= g(x,y) && (x,y) \in \partial\Omega \end{aligned}$$

admet au plus une solution $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$.
<u>Indication:</u> Si u et v sont deux solutions du problème, montrer à l'aide de l'exercice 1 que $w = u - v = 0$ dans $\overline{\Omega}$.

Exercice 3.
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine régulier dont $\vec{\nu}$ est la normale extérieure unité, et soit $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$. Montrer que le problème

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) - u(x,y) &= f(x,y) \qquad && (x,y) \in \Omega, \\ \overrightarrow{\operatorname{grad}}(u(x,y)) \cdot \vec{\nu}(x,y) &= 0 && (x,y) \in \partial\Omega \end{aligned}$$

admet au plus une solution $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$.

Exercice 4.
Exercice 4.4 du livre.

Exercice 5.
Soit $\vec{F}(x_1,x_2) = \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2}(-x_2, x_1)$ pour tout $(x_1,x_2) \in \Omega = \mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$ et soit Γ le cercle de centre 0 et de rayon 1 (orienté dans le sens trigonométrique). Déterminez lesquelles des affirmations suivantes sont correctes.

1. $\displaystyle\int_\Gamma \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = 0.$
2. $\displaystyle\int_\Gamma \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = 2\pi.$
3. S'il existe $f : \Omega \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1$ telle que $\vec{F} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(f)$, alors $\displaystyle\int_\Gamma \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = 0.$
4. Il n'existe pas de $f : \Omega \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1$ telle que $\vec{F} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(f)$.
5. $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{F}) = \vec{0}$.

Exercice 6.
Vérifier le lemme du cours:

$$\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_2} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \int_{\partial\Omega} f \nu_2 \, \mathrm{d}\ell,$$

pour $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, dans le cas particulier où Ω est le triangle de sommets $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$.