

Exercice 1.

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ une courbe simple, régulière par morceaux. On suppose que cette courbe représente un fil dont la densité linéique au point $P \in \Gamma$ est donnée par $\rho(\overrightarrow{OP})$ (O dénote l'origine). Le centre de gravité C de ce fil est donné par :

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\int_{\Gamma} \rho \overrightarrow{OP} dl}{\int_{\Gamma} \rho dl} = \frac{\left(\int_a^b \rho(\gamma(t)) \gamma_1(t) \|\gamma'(t)\| dt, \int_a^b \rho(\gamma(t)) \gamma_2(t) \|\gamma'(t)\| dt, \int_a^b \rho(\gamma(t)) \gamma_3(t) \|\gamma'(t)\| dt \right)}{\int_a^b \rho(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt},$$

où $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une paramétrisation de Γ .

Calculer la position du centre de gravité C pour les deux courbes Γ suivantes :

1. Soit $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0, y \geq 0\}$ un fil homogène de densité ρ .
2. Soit Γ la réunion des trois arcs Γ_a , de densité ρ_a , Γ_b , de densité ρ_b , Γ_c , de densité ρ_c où ρ_a, ρ_b, ρ_c sont des constantes positives et Γ_a, Γ_b et Γ_c sont définis par les courbes formées respectivement des segments de droites $P_a P_b, P_b P_c, P_c P_a$ avec $P_a = (0, 1, 0)$, $P_b = (0, 0, 1)$ et $P_c = (1, 0, 0)$.

Exercice 2.

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe simple, régulière, de paramétrisation $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathcal{C}^2((a, b))$.

Le vecteur tangent unité à Γ est $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$.

Le vecteur courbure est défini par $K(t) = \frac{T'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ et la courbure par $\|K(t)\|$.

1. Montrer que $\|K(t)\| = \frac{|x''(t)y'(t) - y''(t)x'(t)|}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{\frac{3}{2}}}$.
2. Vérifier que si Γ est le cercle de centre 0 et de rayon R , alors $\|K(t)\| = \frac{1}{R}$.
3. Calculer $\|K(t)\|$ pour les courbes de paramétrisation $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ (ellipse) et $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ (hyperbole), où $a, b > 0$.

Exercice 3.

Exercice 2.3 du livre.

Exercice 4.

Exercice 2.6 du livre.

Exercice 5 (Théorème de Bernoulli).

Soit $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vitesse qui satisfait l'équation de la quantité de mouvement

$$\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}p} = -\rho g \vec{e}_3,$$

où $\rho > 0$ désigne la densité constante, $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la pression du fluide, g l'accélération de gravité et $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$.

Soit Γ une ligne de courant telle que

$$\vec{v}(\vec{\gamma}(t)) = \alpha(t) \vec{\gamma}'(t), \quad a \leq t \leq b, \quad \alpha(t) > 0.$$

Montrer le théorème de Bernoulli (1738):

$$\left(\frac{1}{2}\rho\|\vec{v}\|^2 + p + \rho g x_3\right)(\vec{\gamma}(b)) = \left(\frac{1}{2}\rho\|\vec{v}\|^2 + p + \rho g x_3\right)(\vec{\gamma}(a)).$$

Indication: Utiliser la formule $\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \vec{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\vec{v}$. Appliquer le théorème du gradient sur une fonction bien choisie et montrer que $\int_{\Gamma}(\vec{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\vec{v}) \cdot \overrightarrow{d\ell} = 0$.