Exercice 1.
On rappelle le théorème suivant (Théorème 1.2 du livre) :

Théorème 1.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert.*

1. *Si* $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$*, alors* $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))$.
2. *Pour* $n = 3$*, si* $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ *et* $F \in (\mathcal{C}^2(\Omega))^3$*, alors* $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = 0$ *et* $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(F)) = 0$.
3. *Si* $f, g \in \mathcal{C}^1(\Omega)$*, alors* $\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad}(g) + g \operatorname{grad}(f)$.
4. *Si* $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ *et* $F \in (\mathcal{C}^1(\Omega))^n$*, alors* $\operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div}(F) + F \cdot \operatorname{grad}(f)$.
5. *Pour* $n = 3$*, si* $F \in (\mathcal{C}^2(\Omega))^3$*, alors* $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(F)) = -\Delta F + \operatorname{grad}(\operatorname{div}(F))$*, où* $\Delta F = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3)$.
6. *Pour* $n = 3$*, si* $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ *et* $F \in (\mathcal{C}^1(\Omega))^3$*, alors* $\operatorname{rot}(fF) = f \operatorname{rot}(F) + \operatorname{grad}(f) \wedge F$.

Prouvez les points 3. à 6.

Exercice 2.
Soient $k, \rho c_p > 0$, $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \in (\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3))^3$ donnés et soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ qui satisfait l'équation de la chaleur

$$-\operatorname{div}(k \operatorname{grad}(T)) + \rho c_p \operatorname{div}(Tv) = 0. \tag{1}$$

Si $k = \rho c_p = 1$, lesquelles de ces affirmations sont-elles correctes?

1. Si $v = 0$, $T(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$ satisfait (1) pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
2. Si $v(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$, $T(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1} + C$ satisfait (1) pour tout $C \in \mathbb{R}$.
3. Si $v(x_1, x_2, x_3) = (0, x_2, 0)$, $T(x_1, x_2, x_3) = e^{\frac{x_2^2}{2}} + C$ satisfait (1) pour tout $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.
Soient $\rho, \mu > 0$, $g = (g_1, g_2, g_3) \in \mathbb{R}^3$ et $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \in (\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3))^3$ qui satisfait les équations de Navier-Stokes incompressibles

$$\rho \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) - \mu \Delta v_1 + \frac{\partial p}{\partial x_1} = \rho g_1, \tag{2}$$

$$\rho \left(v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) - \mu \Delta v_2 + \frac{\partial p}{\partial x_2} = \rho g_2, \tag{3}$$

$$\rho \left(v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) - \mu \Delta v_3 + \frac{\partial p}{\partial x_3} = \rho g_3, \tag{4}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0. \tag{5}$$

Si $\mu = \rho = 1$ et $g = 0$, lesquelles de ces affirmations sont-elles correctes?

1. $v(x_1, x_2, x_3) = \left(0, \frac{x_1^2}{2}, 0\right)$, $p(x_1, x_2, x_3) = x_2$ satisfont (2)-(5).
2. $v(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{4}, 0, 0\right)$, $p(x_1, x_2, x_3) = x_1$ satisfont (2)-(5).

Exercice 4.
Soient $\lambda, \mu > 0$ (coefficients de Lamé), $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \in (\mathcal{C}(\mathbb{R}^3))^3$ (force) donnés et soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \in (\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3))^3$ (déformation). Le tenseur des contraintes est la matrice symétrique $\sigma \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ définie par $\sigma_{ij} = \mu(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) + \lambda \operatorname{div}(u)\delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$ (ici, $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, 0 sinon). Les équations de l'élasticité linéaire sont données par :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = 0. \tag{8}$$

Soient $v, w \in \mathbb{R}^3$ et soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Déterminez lesquelles de ces affirmations sont correctes.

1. Les équations (6)-(8) peuvent s'écrire $\mu\Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div}(u)) + f = 0$.
2. Les équations (6)-(8) peuvent s'écrire $\mu \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(u)) + (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div}(u)) + f = 0$.
3. Si $f = 0$, $u(x) = v + w \wedge x$ est solution de (6)-(8).
4. Si $f = 0$, $u(x) = (x_2, 0, 0)$ est solution de (6)-(8).
5. Si $f = 0$, $u(x) = \frac{1}{2}(x_1, x_2, 0)$ est solution de (6)-(8).