Exercice 1 (Examen 2024).
Soit $\Omega =]0,1[\times]0,1[$. On cherche $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tel que:

$$\begin{cases} -\Delta u(x_1,x_2) + \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2) = 1, & (x_1,x_2) \in \Omega, \\ u(x_1,x_2) = 0, & (x_1,x_2) \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Soit

$$V = \left\{ v : \Omega \to \mathbb{R}, \iint_\Omega v^2 \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 < +\infty, \iint_\Omega \|\overrightarrow{\mathrm{grad}} v\|^2 \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 < +\infty, v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

On a (plusieurs réponses possibles):

- ☐ $\displaystyle\iint_\Omega \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}} u \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}} v - \frac{\partial u}{\partial x_1} v \right) \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \iint_\Omega v \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2, \quad \forall v \in V.$
- ☐ $\displaystyle\iint_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_1} v \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = 0, \quad \forall v \in V.$
- ☐ Si u_1 et u_2 sont deux solutions de (1), alors $\displaystyle\iint_\Omega \|\overrightarrow{\mathrm{grad}}(u_1 - u_2)\|^2 \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = 0.$
- ☐ La solution de (1), si elle existe, est unique.
- ☐ $\displaystyle\iint_\Omega \|\overrightarrow{\mathrm{grad}} u\|^2 \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \iint_\Omega u \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.$

Exercice 2 (Examen 2024).
Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_N \in V$ des fonctions linéairement indépendantes. La méthode de Galerkin correspondant à (1) est équivalente à résoudre le système linéaire $A\vec{u} = \vec{f}$, où $\vec{u}, \vec{f} \in \mathbb{R}^N$ et $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$. On a (plusieurs réponses possibles):

- ☐ $\displaystyle A_{ij} = \iint_\Omega \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}} \varphi_i \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}} \varphi_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} \varphi_i \right) \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.$
- ☐ $\displaystyle A_{ij} = \iint_\Omega \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}} \varphi_i \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}} \varphi_j - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \varphi_j \right) \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.$
- ☐ $\displaystyle f_i = \iint_\Omega \varphi_i(x_1,x_2) \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.$
- ☐ $\displaystyle A_{ij} = \iint_\Omega \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}} \varphi_i \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}} \varphi_j + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \varphi_j \right) \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.$
- ☐ $\displaystyle A_{ij} = \iint_\Omega \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}} \varphi_i \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}} \varphi_j - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} \varphi_i \right) \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.$

Exercice 3.
Etant donné $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, on cherche $u : (0,1) \to \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, &\quad u(1) = 0. \end{aligned}$$

Expliciter la formulation variationnelle correspondante, la méthode de Galerkin (on notera $V_N = \mathrm{vec}(\varphi_1, ..., \varphi_N)$ et $u_N \in V_N$ la solution), ainsi que le système linéaire obtenu. Dans le cas où $\varphi_i(x) = \sin(i\pi x)$, $i = 1, ..., N$, montrer que la matrice A est diagonale de coefficient diagonal $A_{ii} = i^2\pi^2/2$. Dans le cas où $f(x) = 1$, expliciter $u_N(x)$. Comparer $u(1/2)$ et $u_5(1/2)$.